



Centralna Komisja Egzaminacyjna

# **EGZAMIN GIMNAZJALNY W ROKU SZKOLNYM 2011/2012**

## **CZĘŚĆ MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZA MATEMATYKA**

**ODPOWIEDZI I PROPOZYCJE OCENIANIA  
PRZYKŁADOWEGO ZESTAWU ZADAŃ**

**PAŹDZIERNIK 2011**

## Zadania zamknięte

| Numer zadania | Odpowiedź poprawna | Punktacja | Zasady przyznawania punktów   |
|---------------|--------------------|-----------|---|
| 1.            | D                  | 0-1       | <ul style="list-style-type: none"><li>• poprawna odpowiedź – 1 p.</li><li>• błędna odpowiedź lub brak odpowiedzi – 0 p.</li></ul> |
| 2.            | D                  | 0-1       |   |
| 3.            | C                  | 0-1       |   |
| 4.            | C                  | 0-1       |   |
| 5.            | B                  | 0-1       |   |
| 6.            | D                  | 0-1       |   |
| 7.            | D                  | 0-1       |   |
| 8.            | P P                | 0-1       |   |
| 9.            | P F                | 0-1       |   |
| 10.           | P P                | 0-1       |   |
| 11.           | C                  | 0-1       |   |
| 12.           | D                  | 0-1       |   |
| 13.           | D                  | 0-1       |   |
| 14.           | D                  | 0-1       |   |
| 15.           | F P                | 0-1       |   |
| 16.           | C                  | 0-1       |   |
| 17.           | B                  | 0-1       |   |
| 18.           | D                  | 0-1       |   |
| 19.           | T B                | 0-1       |   |
| 20.           | B                  | 0-1       |   |

## Zadania otwarte

### Uwaga

Za każdy z występujących poziomów, począwszy od P<sub>1</sub>, przyznajemy po 1 punkcie.

### Zadanie 21. (0-3)

#### Przykładowe sposoby rozwiązań

#### **I sposób – ułożenie układu równań**

$x$  – liczba pokoi dwuosobowych

$y$  – liczba pokoi trzyosobowych

$2x$  – liczba dziewcząt

$3y$  – liczba chłopców

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 2x + 3y = 38 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań metodą podstawiania lub przeciwnych współczynników otrzymamy:

$$x = 7, y = 8$$

$$\text{zatem: } 2x = 14, 3y = 24$$

Odpowiedź. W wycieczce uczestniczyło 14 dziewcząt i 24 chłopców.

lub

$x$  – liczba dziewcząt

$y$  – liczba chłopców

$\frac{x}{2}$  – liczba pokoi dwuosobowych

$\frac{y}{3}$  – liczba pokoi trzyosobowych

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 38 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 15 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymamy:  $x = 14, y = 24$

Odpowiedź. W wycieczce uczestniczyło 14 dziewcząt i 24 chłopców.

#### **II sposób – ułożenie równania z jedną niewiadomą**

$x$  – liczba pokoi dwuosobowych

$15 - x$  – liczba pokoi trzyosobowych

$2x$  – liczba dziewcząt

$3(15 - x)$  – liczba chłopców

$$2x + 3(15 - x) = 38$$

$$2x + 45 - 3x = 38$$

$$-x = -7$$

$$x = 7$$

$$2x = 14$$

$$3(15 - x) = 24$$

Odpowiedź. W wycieczce uczestniczyło 14 dziewcząt i 24 chłopców.

### III sposób – metoda prób i błędów

Uczeń zakłada, że liczba pokoi dwuosobowych wynosi 1, wówczas jest 14 pokoi trzyosobowych.

Sprawdza, ile osób mieszczą te pokoje

$$1 \cdot 2 + 14 \cdot 3 = 2 + 42 = 44 - \text{za dużo,}$$

potem kolejno lub skokami sprawdza inne liczby pokoi.

$$4 \cdot 2 + 11 \cdot 3 = 8 + 33 = 41 - \text{za dużo}$$

$$5 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 10 + 30 = 40 - \text{za dużo}$$

$$6 \cdot 2 + 9 \cdot 3 = 12 + 27 = 39 - \text{za dużo}$$

$$7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 14 + 24 = 38 - \text{zgadza się}$$

Uczeń sprawdza, czy są jeszcze inne możliwości:

$$8 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 16 + 21 = 37 - \text{za mało}$$

$$9 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 18 + 18 = 36 - \text{za mało}$$

$$10 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 20 + 15 = 35 - \text{za mało}$$

Uczeń zauważa, że im więcej pokoi dwuosobowych, tym mniej trzyosobowych i tym mniej osób łącznie w tych pokojach się mieści. Czyli nie ma już innej możliwości niż 7 pokoi dwuosobowych i 8 trzyosobowych.

$$7 \cdot 2 = 14$$

$$8 \cdot 3 = 24$$

Odpowiedź. W wycieczce uczestniczyło 14 dziewcząt i 24 chłopców.

### IV sposób – wyrażenie jednej zmiennej jako funkcji drugiej

$x$  – liczba pokoi dziewcząt

$y$  – liczba pokoi chłopców

$$2x + 3y = 38$$

$$3y = 38 - 2x$$

$$y = \frac{38 - 2x}{3}$$

| $x$                     | 1  | 2              | 3              | 4  | 5              | 6              | 7 | 8              | 9              | 10 | 11             | 12             | 13 | 14             | 15            |
|-------------------------|----|----------------|----------------|----|----------------|----------------|---|----------------|----------------|----|----------------|----------------|----|----------------|---------------|
| $y = \frac{38 - 2x}{3}$ | 12 | $\frac{34}{3}$ | $\frac{32}{3}$ | 10 | $\frac{28}{3}$ | $\frac{26}{3}$ | 8 | $\frac{22}{3}$ | $\frac{20}{3}$ | 6  | $\frac{16}{3}$ | $\frac{14}{3}$ | 4  | $\frac{10}{3}$ | $\frac{8}{3}$ |

$x$  i  $y$  muszą być liczbami całkowitymi, czyli wystarczy sprawdzić pięć możliwości:

$$x = 1: 1 + 12 \neq 15$$

$$x = 4: 4 + 10 \neq 15$$

$$x = 7: 7 + 8 = 15$$

$$x = 10: 10 + 6 \neq 15$$

$$x = 13: 13 + 4 \neq 15$$

Tylko dla  $x = 7$  otrzymujemy sumę 15.

Zatem  $2 \cdot 7 = 14$  – liczba dziewcząt

$$3 \cdot 8 = 24 - \text{liczba chłopców}$$

Odpowiedź. W wycieczce uczestniczyło 14 dziewcząt i 24 chłopców.

## Poziom wykonania

**P<sub>6</sub>** – pełne rozwiązanie – 3 punkty

uzyskanie poprawną metodą odpowiedzi: 14 dziewcząt i 24 chłopców

**P<sub>4</sub>** – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne – 2 punkty

ułożenie równania z jedną niewiadomą lub układu równań z dwiema niewiadomymi

lub

wyrażenie jednej niewiadomej jako funkcji drugiej

lub

dokonanie pełnego przeglądu możliwości w metodzie prób i błędów

**P<sub>1</sub>** – dokonano niewielkiego, ale koniecznego postępu na drodze do całkowitego rozwiązania – 1 punkt

zauważenie zależności między liczbą i rodzajem pokoi a liczbą dziewcząt i liczbą chłopców

lub

podstawienie i sprawdzenie warunków zadania dla co najmniej 2 liczb pokoi

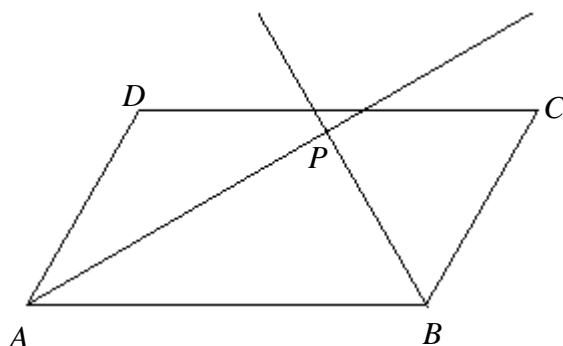
**P<sub>0</sub>** – rozwiązanie niestanowiące postępu – 0 punktów

rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

## Zadanie 22. (0-3)

### Przykładowe sposoby rozwiązań

#### I sposób



Korzystając z definicji dwusiecznej, mamy:

$$|\angle BAP| = |\angle DAP| = \alpha \text{ oraz } |\angle CBP| = |\angle ABP| = \beta.$$

Korzystając z własności miar kątów w równoległoboku, mamy:  $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ , stąd  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .

Korzystając z twierdzenia o sumie kątów trójkąta, mamy:

$$|\angle APB| = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Odpowiedź. Dwusieczne  $AP$  i  $BP$  są prostopadłe.

## II sposób

Korzystając z własności miar kątów w równoległoboku, mamy:  $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ , stąd  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

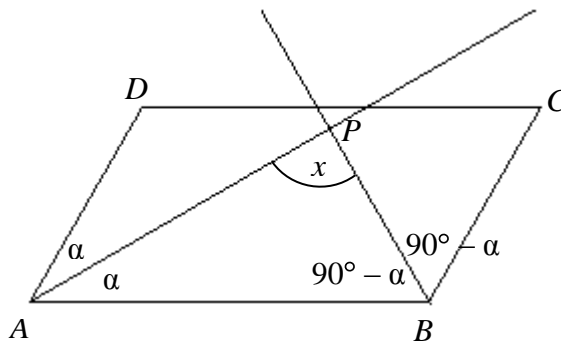
Z twierdzenia o sumie kątów trójkąta, mamy:

$$x = 180^\circ - (\alpha + 90^\circ - \alpha)$$

$$x = 180^\circ - 90^\circ$$

$$x = 90^\circ$$

Odpowiedź. Dwsieczne są prostopadłe.



## Poziom wykonania

**P<sub>6</sub>** – pełne rozwiązanie – 3 punkty

wykorzystanie faktu, że suma kątów jakie tworzą dwsieczne z bokiem AB jest równa  $90^\circ$  i wprowadzenie wniosku, że dwsieczne kątów są prostopadłe

**P<sub>4</sub>** – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne – 2 punkty  
wykorzystanie faktu, że suma kątów przy jednym boku równoległoboku wynosi  $180^\circ$

**P<sub>2</sub>** – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane – 1 punkt  
wykorzystanie własności dwsiecznej kąta

**P<sub>0</sub>** – rozwiązanie niestanowiące postępu – 0 punktów  
rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

## Zadanie 23. (0-4)

### Przykładowy sposób rozwiązania

Bryłę można podzielić na dwa takie same graniastosłupy prawidłowe trójkątne. Podstawa każdego z nich jest trójkątem równobocznym o boku długości 2, więc pole podstawy jest równe  $\frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ .

Wysokość każdego z graniastosłupów równa jest 2, więc jego objętość równa jest  $\frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 2 = 2\sqrt{3}$ .

Objętość całej bryły jest równa  $2 \cdot 2\sqrt{3}$ .

Odpowiedź. Cała bryła ma więc objętość  $4\sqrt{3}$ .

## Poziom wykonania

**P<sub>6</sub>** – pełne rozwiązanie – 4 punkty  
obliczenie objętości bryły ( $4\sqrt{3}$ )

**P<sub>5</sub>** – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki – 3 punkty  
zauważenie, że objętość bryły można obliczyć dzieląc ją na dwa graniastosłupy, wybranie poprawnej metody obliczania objętości graniastosłupów, ale zostały popełnione błędy rachunkowe w obliczeniach

- P<sub>3</sub>** – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane, ale w trakcie ich pokonywania popełniono błędy – 2 punkty  
zauważenie, że bryłę można podzielić na dwie bryły, rozpoznanie, że jedna z nich jest graniastosłupem prawidłowym trójkątnym i obliczenie jego objętości, ale została zastosowana niepoprawna metoda obliczania objętości drugiej bryły
- P<sub>1</sub>** – dokonano niewielkiego, ale koniecznego postępu na drodze do całkowitego rozwiązania – 1 punkt  
obliczenie pola trójkąta  
lub  
dostrzeżenie, że bryłę można podzielić na dwie bryły, z których jedna jest graniastosłupem prawidłowym trójkątnym
- P<sub>0</sub>** – rozwiązanie niestanowiące postępu – 0 punktów  
rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania