PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY
Z NOWĄ ERĄ 2016/2017

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.2. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.	**A**

Zadanie 2. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.1. Ciągi. Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym.	**C**

Zadanie 3. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.6. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania wielomianowe dające się łatwo sprowadzić do równań kwadratowych.	**B**

Zadanie 4. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6.5. Trygonometria. Zdający stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów.	**D**

Zadanie 5. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8.4. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość punktu od prostej.	**B**

Zadanie 6. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$.	**180**

Zadanie 7. (0−2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.2. Ciągi. Zdający oblicza granice ciągów korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.

Przykładowe rozwiązania

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2}{(2n-2)^2+(6n+3)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}{\left(2-\frac{2}{n}\right)^2+\left(6+\frac{3}{n}\right)^2}=\frac{1}{4+36}=\frac{1}{40}=0{,}025$$

lub

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2}{(2n-2)^2+(6n+3)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+1}{4n^2-8n+4+36n^2+36n+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+1}{40n^2+28n+13}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{40+\frac{28}{n}+\frac{13}{n^2}}=\frac{1}{40}=0{,}025$$

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy zapisze $\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2}{(2n-2)^2+(6n+3)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}{\left(2-\frac{2}{n}\right)^2+\left(6+\frac{3}{n}\right)^2}$

albo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{40+\frac{28}{n}+\frac{13}{n^2}}.$$

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy obliczy granicę $\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2}{(2n-2)^2+(6n+3)^2}=\frac{1}{40}=0{,}025$.

Zadanie 8. (0−2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.1. Funkcje. Zdający na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y=\lvert f(x)\rvert$, $y=c\cdot f(x)$, $y=f(cx)$. POZIOM PODSTAWOWY 4.10. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej.

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>

Funkcja kwadratowa $f(x)=x^2-120$ przyjmuje najmniejszą wartość równą -120 dla $x=0$. Przesunięcie wykresu funkcji f wzdłuż osi Ox o 4 jednostki w lewo nie zmienia zbioru wartości funkcji. Największa wartość funkcji $y=-2\cdot f(x+4)$ jest równa 240. Następnie przesuwamy wykres o 6 jednostek w dół, więc największa wartość funkcji $g(x)=-2\cdot f(x+4)-6$ to 234.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

- gdy zapisze, że największa wartość funkcji $y = -2 \cdot f(x+4)$ jest równa 240

albo

- gdy zapisze, że najmniejsza wartość funkcji $y = 2 \cdot f(x+4)$ jest równa -240.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy zapisze, że największa wartość funkcji $g(x) = -2 \cdot f(x+4) - 6$ to 234.

II sposób

Wyznaczamy wzór funkcji g i korzystamy ze wzoru na największą wartość trójmianu kwadratowego.

Mamy zatem:

$$g(x) = -2x^2 - 16x + 202$$

oraz

$$y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{[(-16)^2 + 8 \cdot 202]}{[4 \cdot (-2)]} = \frac{1872}{8} = 234.$$

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy zapisze wzór funkcji g w postaci $g(x) = -2x^2 - 16x + 202$ i obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $\Delta = 1872$.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy zapisze, że największa wartość funkcji $g(x) = -2 \cdot f(x+4) - 6$ to 234.

Zadanie 9. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.3. Ciągi. Zdający rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

Przykładowe rozwiązanie

Iloraz q ciągu geometrycznego (a_n) jest równy $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k}$.
Ponieważ $k > 1$, co wynika z założenia, więc $|q| < 1$. To znaczy, że istnieje skończona suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) i jest równa $S = \frac{k}{1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)} = k^2$.

Otrzymujemy równanie $k^2 = 5$, którego jedynym rozwiązaniem większym od 1 jest liczba $\sqrt{5}$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy sprawdzi, że $|q| < 1$ dla $k > 1$ i zapisze, że suma wszystkich wyrazów ciągu jest równa $S = \frac{k}{1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)}$.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy zdający poda rozwiązanie $k = \sqrt{5}$.

Zadanie 10. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający: 5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów; 6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin 2x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$.

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>

Zauważmy, że $2\cos 2x \cos 5x = \cos 7x + \cos 3x$. Zatem równanie możemy zapisać w postaci równoważnej $\cos 7x + \cos 3x = \cos 7x + \frac{1}{2}$, czyli $\cos 3x = \frac{1}{2}$.

Stąd otrzymujemy

$3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą,

czyli

$x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zatem w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ mamy następujące rozwiązania tego równania: $x = \frac{\pi}{9}$, $x = \frac{5\pi}{9}$, $x = \frac{7\pi}{9}$.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**

Zdający zapisze, że $2\cos 2x \cos 5x = \cos 7x + \cos 3x$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zdający zapisze równanie w postaci równoważnej $\cos 3x = \frac{1}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający zapisze wszystkie rozwiązania równania $\cos 3x = \frac{1}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie pełne .... **4 pkt**

Zdający zapisze wszystkie rozwiązania równania $\cos 3x = \frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{9}$, $x = \frac{5\pi}{9}$, $x = \frac{7\pi}{9}$.

<u>**II sposób**</u>

Zauważmy, że $\cos 7x = \cos(5x + 2x) = \cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x$. Zatem równanie możemy zapisać w postaci równoważnej

$$2\cos 2x \cos 5x = \cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x + \frac{1}{2}.$$

Stąd

$$\cos 5x \cos 2x + \sin 5x \sin 2x = \frac{1}{2}.$$

Ze wzoru na cosinus różnicy kątów otrzymujemy

$$\cos(5x - 2x) = \frac{1}{2},$$

czyli

$$\cos 3x = \frac{1}{2}.$$

Stąd otrzymujemy

$3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą,

czyli

$x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zatem w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ mamy następujące rozwiązania tego równania: $x = \frac{\pi}{9}$, $x = \frac{5\pi}{9}$, $x = \frac{7\pi}{9}$.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający zapisze równanie w postaci $\cos 5x \cos 2x + \sin 5x \sin 2x = \frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający zapisze równanie w postaci równoważnej $\cos 3x = \frac{1}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający zapisze wszystkie rozwiązania równania $\cos 3x = \frac{1}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający zapisze wszystkie rozwiązania równania $\cos 3x = \frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{9}$, $x = \frac{5\pi}{9}$, $x = \frac{7\pi}{9}$.

Zadanie 11. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	3.2. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.

Przykładowe rozwiązania

<u>**I sposób**</u>

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego:

$\Delta = (-(4m+2))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4m^2 + 4m - 3) = 16m^2 + 16m + 4 - 16m^2 - 16m + 12 = 16 > 0$

Zatem dla każdej wartości parametru m funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{-(-(4m+2))-4}{2\cdot 1} = \frac{4m-2}{2} = 2m-1,\ x_2 = \frac{-(-(4m+2))+4}{2\cdot 1} = \frac{4m+6}{2} = 2m+3.$$

Warunek $x_1+x_2 = |x_1-x_2|$ możemy więc zapisać w następujący sposób:

$$(2m-1)+(2m+3) = |(2m-1)-(2m+3)|,\ \text{przy czym } x_1+x_2 \geqslant 0, \text{ czyli } m \geqslant -\frac{1}{2}$$

$$4m+2=|2m-1-2m-3|,$$

$$4m+2=|-4|,$$

$$4m+2=4,$$

$$m=\frac{1}{2}.$$

Uwaga

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x)=x^2-(4m+2)x+4m^2+4m-3$ możemy też wyznaczyć, przekształcając ją do postaci iloczynowej:

$$f(x)=x^2-2(2m+1)x+(2m+1)^2-4,$$

$$f(x)=(x-(2m+1))^2-4,$$

$$f(x)=(x-2m-1-2)(x-2m-1+2),$$

$$f(x)=(x-2m-3)(x-2m+1), \text{ więc}$$

$$x_1=2m+3,\ x_2=2m-1.$$

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego i stwierdzi, że dla każdej wartości parametru m istnieją dwa różne miejsca zerowe funkcji f.

Rozwiązanie, w którym jest istotnym postęp .... 2 pkt

Zdający wyznaczy miejsca zerowe w zależności od parametru m: $x=2m+3,\ x=2m-1$.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 3 pkt

Zdający zapisze warunek $2m+3+2m-1=|2m+3-(2m-1)|$

lub $2m+3+2m-1=|2m-1-(2m+3)|$

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający rozwiąże równanie i zapisze wynik $m=\frac{1}{2}$.

<u>II sposób</u>

Funkcja kwadratowa f ma dwa różne miejsca zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik trójmianu $x^2-(4m+2)x+4m^2+4m-3$ jest dodatni. Sprawdzamy, dla jakich wartości parametru m spełniona jest nierówność $\Delta > 0$:

$$(-(4m+2))^2-4\cdot 1\cdot(4m^2+4m-3)>0,$$

$$16m^2+16m+4-16m^2-16m+12>0,$$

$$16>0,$$

co jest prawdą dla każdej rzeczywistej wartości parametru m.

Zapiszemy teraz warunek $x_1+x_2=|x_1-x_2|$, korzystając z wzorów Viète'a:

$$-\frac{-(4m+2)}{1}=|x_1-x_2|.$$

Ponieważ $|x_1 - x_2| \geqslant 0$, więc aby zachodziła równość, musi być spełniony warunek:

$$-\frac{-(4m+2)}{1} \geqslant 0,$$

czyli $4m+2 \geqslant 0$.

Zatem $m \geqslant -\frac{1}{2}$.

Ponieważ dla $m \geqslant -\frac{1}{2}$ prawdziwa jest nierówność $x_1 + x_2 \geqslant 0$, więc można bez utraty równoważności podnieść obie strony równania $x_1 + x_2 = |x_1 - x_2|$ do kwadratu:

$$(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2,$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2,$$

$$4x_1x_2 = 0,$$

$$x_1x_2 = 0.$$

Ze wzorów Viète'a otrzymujemy:

$$\frac{4m^2 + 4m - 3}{1} = 0,$$

$$4m^2 + 4m - 3 = 0,$$

$$4m^2 + 4m + 1 - 4 = 0,$$

$$(2m+1)^2 - 4 = 0,$$

$$(2m + 1 - 2)(2m + 1 + 2) = 0,$$

$$(2m - 1)(2m + 3) = 0,$$

$$2m - 1 = 0 \text{ lub } 2m + 3 = 0,$$

$$m = \frac{1}{2} \text{ lub } m = -\frac{3}{2}.$$

Tylko pierwsza z tych liczb spełnia warunek $m \geqslant -\frac{1}{2}$. Zatem tylko dla $m = \frac{1}{2}$ spełnione są warunki zadania.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego i stwierdzi, że dla każdej wartości parametru m istnieją dwa różne miejsca zerowe funkcji f.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający zapisze warunek $x_1 + x_2 = |x_1 - x_2|$ w postaci równoważnej: $x_1 + x_2 \geqslant 0$ i $(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2$.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 3 pkt

Zdający

- skorzysta dwukrotnie ze wzorów Viète'a, zapisze nierówność $-\frac{-(4m+2)}{1} \geqslant 0$ oraz równanie $\frac{4m^2 + 4m - 3}{1} = 0$, a następnie każde z nich rozwiąże (nierówność: $m \geqslant -\frac{1}{2}$, równanie: $m = \frac{1}{2}$ lub $m = -\frac{3}{2}$).

albo

- skorzysta dwukrotnie ze wzorów Viète'a, zapisze nierówność $-\frac{-(4m+2)}{1} \geqslant 0$ oraz równanie $\frac{4m^2 + 4m - 3}{1} = 0$, a następnie napisze, że rozwiązaniem jest część wspólna rozwiązania nierówności i rozwiązania równania.

Rozwiązanie pełne .... **4 pkt**

Zdający poda wynik $m = \frac{1}{2}$.

III sposób

Przypuśćmy, że istnieje taka wartość parametru m, dla której funkcja $f(x) = x^2 - (4m+2)x + 4m^2 + 4m - 3$ ma dwa różne miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające warunek $x_1 + x_2 = |x_1 - x_2|$.

Po podniesieniu obu stron tej równości do kwadratu otrzymujemy:

$$(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2,$$
$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2,$$
$$4x_1x_2 = 0,$$
$$x_1x_2 = 0.$$

Ze wzorów Viète'a otrzymujemy:

$$\frac{4m^2 + 4m - 3}{1} = 0,$$
$$4m^2 + 4m - 3 = 0,$$
$$4m^2 + 4m + 1 - 4 = 0,$$
$$(2m+1)^2 - 4 = 0,$$
$$(2m + 1 - 2)(2m + 1 + 2) = 0,$$
$$(2m - 1)(2m + 3) = 0,$$
$$2m - 1 = 0 \text{ lub } 2m + 3 = 0,$$
$$m = \frac{1}{2} \text{ lub } m = -\frac{3}{2}.$$

Pozostaje teraz tylko sprawdzić, czy dla wyznaczonych wartości parametru m spełnione są warunki zadania.

Gdy $m = \frac{1}{2}$, to:

$$f(x) = x^2 - \left(4 \cdot \frac{1}{2} + 2\right)x + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} - 3, \text{ więc}$$
$$f(x) = x(x-4).$$

Zatem istnieją dwa różne miejsca zerowe: $x_1 = 0, x_2 = 4$. Spełniają one warunek $x_1 + x_2 = |x_1 - x_2|$, gdyż $0 + 4 = |0 - 4|$.

Gdy $m = -\frac{3}{2}$, to:

$$f(x) = x^2 - \left(4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 2\right)x + 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 3, \text{ więc}$$
$$f(x) = x(x+4).$$

Zatem funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe: $x_1 = 0$, $x_2 = -4$. Nie spełniają one jednak warunku $x_1 + x_2 = |x_1 - x_2|$, gdyż $0 + (-4) = -4 \neq |0 - (-4)| = 4$.

Zatem jest tylko jedna wartość parametru, $m = \frac{1}{2}$, dla której spełnione są warunki zadania.

Schemat punktowania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**

Zdający stwierdzi, że jednym z miejsc zerowych funkcji f jest 0.

Rozwiązanie, w którym jest istotnym postęp .... **2 pkt**

Zdający zapisze równanie wynikające ze wzoru Viète'a na $x_1 \cdot x_2$: $\frac{4m^2+4m-3}{1}=0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający rozwiąże równanie $\frac{4m^2+4m-3}{1}=0$ ($m=\frac{1}{2}$ lub $m=-\frac{3}{2}$).

Rozwiązanie pełne .... **4 pkt**

Zdający sprawdzi oba przypadki rozwiązania równania i wyciągnie poprawne wnioski, że $m=\frac{1}{2}$ spełnia warunek podany w zadaniu, a $m=-\frac{3}{2}$ nie spełnia tego warunku.

Zadanie 12. (0–3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	POZIOM PODSTAWOWY 2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (przeprowadza dowód algebraiczny).

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>

Przekształcając nierówność w sposób równoważny, otrzymujemy:

$$x^2+2xy+y^2+x^2+2xz+z^2+y^2+2zy+z^2+x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz \geqslant 0,$$
$$(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2+(x+y)^2+2(x+y)z+z^2 \geqslant 0,$$
$$(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2+(x+y+z)^2 \geqslant 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa, ponieważ jej lewa strona jest sumą czterech liczb nieujemnych, więc jest nieujemna.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **1 pkt**

Zdający zapisze nierówność w postaci

- $x^2+2xy+y^2+x^2+2xz+z^2+y^2+2zy+z^2+x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz \geqslant 0$

albo

- $(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2+x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz \geqslant 0$

albo

- $(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2+(x+y)^2+2(x+y)z+z^2 \geqslant 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Zdający zapisze nierówność w postaci

$(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2+(x+y+z)^2 \geqslant 0$.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

<u>II sposób</u>

Nierówność możemy zapisać w postaci równoważnej

$$3x^2+4(y+z)x+3y^2+3z^2+4yz \geqslant 0.$$

Możemy ją potraktować jak nierówność kwadratową z jedną niewiadomą x.

Ponieważ współczynnik przy x^2 jest dodatni, więc wystarczy wykazać, że wyróżnik trójmianu stojącego po lewej stronie nierówności jest niedodatni.

$$\Delta_x = 16(y+z)^2 - 12(3y^2+3z^2+4yz) = -4(5y^2+4yz+5z^2) =$$
$$= -4(3y^2+2y^2+4yz+2z^2+3z^2) = -4(3y^2+2(y+z)^2+3z^2) \leqslant 0,$$

gdyż $3y^2+2(y+z)^2+3z^2 \geqslant 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych y, z.

Uwaga
Prawdziwość nierówności $\Delta_x \leqslant 0$, czyli $-4(5y^2+4yz+5z^2) \leqslant 0$, a więc $5y^2+4yz+5z^2 \geqslant 0$, możemy wykazać też w inny sposób, np. zapisując ją w postaci równoważnej $(2y+z)^2+y^2+4z^2 \geqslant 0$, której prawdziwość jest oczywista. Możemy też potraktować tę nierówność jak nierówność kwadratową z niewiadomą y. Wówczas $\Delta_y = (4z)^2 - 4\cdot 5\cdot 5z^2 = -84z^2 \leqslant 0$ dla każdej liczby rzeczywistej z. To, wraz z dodatnim znakiem współczynnika przy y^2, oznacza prawdziwość tej nierówności.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **1 pkt**

Zdający uporządkuje wyrażenie jako trójmian kwadratowy np. zmiennej x:

$3x^2+4(y+z)x+3y^2+3z^2+4yz \geqslant 0$ i obliczy wyróżnik tego trójmianu: $\Delta_x = -4(5y^2+4yz+5z^2)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Zdający uzasadni, że nierówność $-4(5y^2+4yz+5z^2) \leqslant 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej y i każdej liczby rzeczywistej z poprzez

- zapisanie jej w postaci równoważnej $(2y+z)^2+y^2+4z^2 \geqslant 0$

albo

- obliczenie wyróżnika $\Delta_y = (4z)^2 - 4\cdot 5\cdot 5z^2 = -84z^2$ trójmianu $5y^2+4yz+5z^2$ i stwierdzenie, że jest on niedodatni dla każdej liczby rzeczywistej z.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 13. (0–4)

III. Modelowanie matematyczne.	10.2. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.

Przykładowe rozwiązanie

A – zdarzenie polega na tym, że suma wyrzuconych oczek na wszystkich kostkach będzie parzysta

B – zdarzenie polega na tym, że dokładnie na jednej kostce wypadnie 6 oczek

Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego

$$P(A\mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A\cap B|}{|B|}.$$

Wystarczy więc obliczyć tylko $|A\cap B|$ oraz $|B|$.

Obliczmy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu B.

Sześć oczek mogło wypaść na pierwszej, drugiej albo na trzeciej kostce, a na pozostałych dowolna liczba oczek oprócz sześciu. Mamy zatem: $|B| = 3\cdot 5\cdot 5 = 75$ możliwości.

Obliczmy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A \cap B$.

Na dokładnie jednej kostce wypadło sześć oczek, więc na dwóch pozostałych muszą wypaść dwie parzyste (różne od sześciu) albo dwie nieparzyste liczby oczek.

W pierwszym przypadku mamy $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ możliwości, a w drugim $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Więc $|A \cap B| = 12 + 27 = 39$.

Zatem $P(A \mid B) = \frac{39}{75} = \frac{13}{25}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 6^3$

albo

- opisze obie sytuacje, w których na jednej kostce wypadnie 6 oczek i suma oczek będzie parzysta.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zdający obliczy

- prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cap B$ lub tylko $|A \cap B|$

albo

- prawdopodobieństwo zdarzenia B lub tylko $|B|$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cap B$ (lub tylko $|A \cap B|$) oraz prawdopodobieństwo zdarzenia B (lub tylko $|B|$).

Rozwiązanie pełne .... **4 pkt**

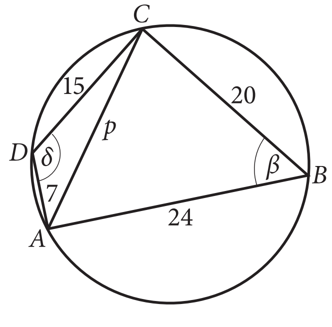
Zdający obliczy prawdopodobieństwo warunkowe $P(A \mid B)$: $P(A \mid B) = \frac{39}{75} = \frac{13}{25}$.

Zadanie 14. (0–4)

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający: 1) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu; 5) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Ponieważ czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, to $\beta = 180° - \delta$. Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ACD i ABC otrzymujemy

$$p^2 = 7^2 + 15^2 - 2 \cdot 7 \cdot 15 \cdot \cos\delta \text{ oraz } p^2 = 24^2 + 20^2 - 2 \cdot 24 \cdot 20 \cdot \cos(180° - \delta).$$

Drugą z tych równości możemy zapisać, korzystając ze wzoru redukcyjnego, w postaci

$$p^2 = 24^2 + 20^2 + 2 \cdot 24 \cdot 20 \cdot \cos\delta.$$

Po pomnożeniu obu stron pierwszego równania przez 32, drugiego równania przez 7 i dodaniu stronami otrzymanych równań, otrzymujemy równanie

$$39p^2 = 15\,600.$$

Stąd $p = 20$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **1 pkt**

Zdający wykorzysta twierdzenie o sumie przeciwległych kątów czworokąta wpisanego w okrąg.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Zdający zapisze dwa równania wynikające z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ABC i ACD: $p^2 = 7^2 + 15^2 - 2 \cdot 7 \cdot 15 \cdot \cos\delta$ oraz $p^2 = 24^2 + 20^2 - 2 \cdot 24 \cdot 20 \cdot \cos(180° - \delta)$.

Rozwiązanie prawie pełne .... **3 pkt**

Zdający zapisze równanie, w którym jedyną niewiadomą jest długość przekątnej AC.

Rozwiązanie pełne .... **4 pkt**

Zdający wyznaczy długość przekątnej AC: $p = 20$.

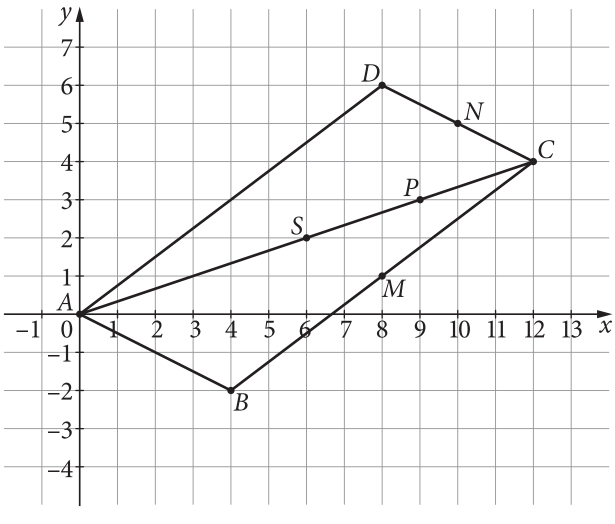
Zadanie 15. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	POZIOM PODSTAWOWY 8.5. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka.

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>

Obliczmy współrzędne środka P odcinka MN: $P = \left(\frac{8+10}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (9, 3)$.



Oznaczmy współrzędne punktu $C = (x_C, y_C)$. Punkt S jest środkiem odcinka AC, więc $S = \left(\frac{x_C}{2}, \frac{y_C}{2}\right)$.

Punkt P jest środkiem odcinka SC, więc $\frac{x_C + \frac{x_C}{2}}{2} = 9$ oraz $\frac{y_C + \frac{y_C}{2}}{2} = 3$.

Stąd $C = (12, 4)$.

Punkt N jest środkiem odcinka CD, więc $\frac{x_D + 12}{2} = 10$ oraz $\frac{y_D + 4}{2} = 5$. Stąd $D = (8, 6)$.

Punkt M jest środkiem odcinka CB, więc $\frac{x_B + 12}{2} = 8$ oraz $\frac{y_B + 4}{2} = 1$. Stąd $B = (4, -2)$.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**

Zdający

- zapisze, że środek P odcinka MN jest środkiem odcinka SC, gdzie S jest środkiem symetrii równoległoboku $ABCD$

albo

- obliczy współrzędne środka P odcinka MN: $P = (9, 3)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zdający zapisze, że środek P odcinka MN jest środkiem odcinka SC, gdzie S jest środkiem symetrii równoległoboku $ABCD$, oraz obliczy współrzędne środka P odcinka MN: $P = (9, 3)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający obliczy współrzędne wierzchołka C: $C = (12, 4)$.

Rozwiązanie prawie pełne .... **4 pkt**

Zdający obliczy

- współrzędne wierzchołków B, C i D, popełniając w trakcie rozwiązania błąd rachunkowy

albo

- dwa z trzech szukanych wierzchołków równoległoboku.

Rozwiązanie pełne .... **5 pkt**

Zdający obliczy współrzędne wierzchołków B, C, D: $B = (4, -2)$, $C = (12, 4)$, $D = (8, 6)$.

<u>II sposób</u>

Współrzędne punktów B, C i D możemy wyznaczyć, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} \frac{x_B + x_C}{2} = 8 \\ \frac{x_C + x_D}{2} = 10 \\ x_B + x_D = x_C \\ \frac{y_B + y_C}{2} = 1 \\ \frac{y_C + y_D}{2} = 5 \\ y_B + y_D = y_C \end{cases}$$

Rozwiązaniami tego układu są:

$x_B = 4$

$x_C = 12$

$x_D = 8$

$y_B = -2$

$y_C = 4$

$y_D = 6$

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**

Zdający zapisze

- równanie $\frac{x_B + x_C}{2} = 8$ lub $\frac{x_C + x_D}{2} = 10$ lub $\frac{y_B + y_C}{2} = 1$ lub $\frac{y_C + y_D}{2} = 5$, czyli wykorzysta fakt, że punkty M i N są środkami odcinków BC i CD

albo

- zapisze równanie $x_B + x_D = x_C$ lub $y_B + y_D = y_C$, czyli wykorzysta fakt, że $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zdający zapisze równanie $\frac{x_B + x_C}{2} = 8$ lub $\frac{x_C + x_D}{2} = 10$ lub $\frac{y_B + y_C}{2} = 1$ lub $\frac{y_C + y_D}{2} = 5$, czyli wykorzysta fakt, że punkty M i N są środkami odcinków BC i CD, oraz zapisze równanie $x_B + x_D = x_C$ lub $y_B + y_D = y_C$, czyli wykorzysta fakt, że $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający zapisze wszystkie równania potrzebne do wyznaczenia współrzędnych punktów B, C i D, np. $\begin{cases} \frac{x_B + x_C}{2} = 8 \\ \frac{x_C + x_D}{2} = 10 \\ x_B + x_D = x_C \\ \frac{y_B + y_C}{2} = 1 \\ \frac{y_C + y_D}{2} = 5 \\ y_B + y_D = y_C \end{cases}$

Rozwiązanie prawie pełne .... **4 pkt**

Zdający obliczy współrzędne wierzchołków B, C i D, popełniając w trakcie rozwiązania błąd rachunkowy.

Rozwiązanie pełne .... **5 pkt**

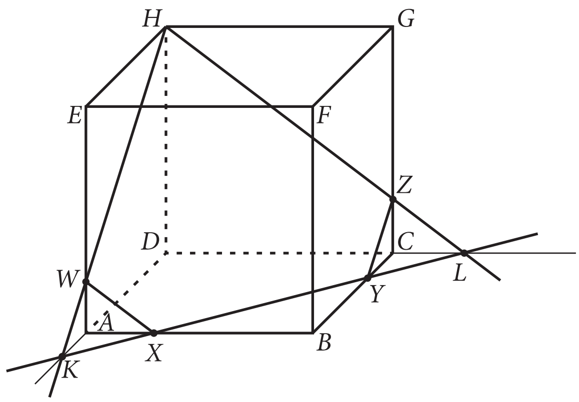
Zdający obliczy współrzędne wierzchołków B, C, D: $B = (4, -2)$, $C = (12, 4)$, $D = (8, 6)$.

Zadanie 16. (0–6)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.4. Planimetria. Zdający rozpoznaje figury podobne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności. 9.2. Stereometria. Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.

Przykładowe rozwiązanie

Poprowadźmy prostą XY do przecięcia z prostymi AD i CD odpowiednio w punktach K i L.



Punkt W jest punktem przecięcia prostej KH z krawędzią AE, a Z to punkt przecięcia prostej HL z krawędzią CG.

Obliczmy długości kolejnych boków pięciokąta $HWXYZ$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta XBY otrzymujemy

$$|XY| = \sqrt{|BX|^2 + |BY|^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}.$$

Trójkąty XBY i XAK są podobne (oba są prostokątne i mają równe kąty przy wierzchołku X). Stąd wynika, że

$$\frac{|BY|}{|AK|} = \frac{|BX|}{|AX|} = \frac{8}{8}.$$

Zatem $|AK| = 4$.

Trójkąty prostokątne KAW i KDH są podobne, więc

$$\frac{4}{16} = \frac{|AW|}{12}.$$

Stąd $|AW| = 3$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AXW otrzymujemy

$$|WX| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

natomiast z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta WEH

$$|WH| = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15.$$

Obwód pięciokąta $HWXYZ$ jest zatem równy

$$L_{HWXYZ} = |XY| + 2 \cdot |XW| + 2 \cdot |WH| = 8\sqrt{2} + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 15 = 8\sqrt{2} + 40.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**

Zdający

- dorysuje prostą *XY* do punktu przecięcia z prostą *AD* lub prostą *CD*

albo

- obliczy lub poda długość odcinka $|XY| = 8\sqrt{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zdający obliczy długość odcinka *AK* lub *CL* oraz zapisze lub zaznaczy na rysunku, że punkty *K*, *W*, *H* albo *L*, *Z*, *H* są współliniowe.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający obliczy długość odcinka *AW*: $|AW| = 3$.

Rozwiązanie prawie pełne .... **5 pkt**

Zdający obliczy długości odcinków *WH* i *WX*: $|WH| = 15$ oraz $|WX| = 5$.

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy długość tylko jednego z odcinków, *WH* lub *WX*, to otrzymuje **4 punkty.**

Rozwiązanie pełne .... **6 pkt**

Zdający obliczy obwód szukanego przekroju: $L_{HWXYZ} = 8\sqrt{2} + 40$.

Zadanie 17. (0–7)

III. Modelowanie matematyczne.	11.6. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Przykładowe rozwiązanie

Niech x oznacza długość krótszej krawędzi podstawy prostopadłościanu. Wtedy długość drugiej z krawędzi podstawy jest równa $x+3$. Oznaczmy też literą h długość trzeciej z krawędzi prostopadłościanu. Z treści zadania wynika, że

$$4x+4(x+3)+4h=52.$$

Stąd:

$$x+x+3+h=13,$$
$$h=10-2x.$$

Objętość V prostopadłościanu możemy zapisać jako funkcję zmiennej x, wzorem

$$V(x)=x(x+3)(10-2x)=-2x^3+4x^2+30x.$$

Dziedziną funkcji V jest zbiór takich wartości x, że $x > 0$ i $10-2x > 0$, a więc $0 < x < 5$.

Pochodna funkcji V jest równa

$$V'(x) = -6x^2 + 8x + 30,\ x \in (0,5).$$

Obliczmy miejsca zerowe i zbadajmy znak pochodnej:

$V'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-6x^2+8x+30=0$, stąd $x=-\frac{5}{3}$ lub $x=3$.

Uwzględniając dziedzinę funkcji, mamy:

$V'(x) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (0,3)$;

$V'(x) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (3, 5)$.

Zatem funkcja V jest w przedziale $(0, 3\rangle$ rosnąca, a w przedziale $\langle 3, 5)$ malejąca. Wynika stąd, że dla $x = 3$ funkcja V ma maksimum lokalne, które jest jednocześnie jej największą wartością.

Gdy $x = 3$, to wtedy $x + 3 = 6$ oraz $h = 10 - 2x = 4$. Objętość prostopadłościanu jest wtedy równa

$$V_{\max}(3) = 3 \cdot 6 \cdot 4 = 72.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

<u>Pierwszy etap</u> składa się z trzech części:
a) wprowadzenie oznaczeń, np. x, $x + 3$, h, oraz zapisanie równania wynikającego z warunków zadania: $2x + h = 10$,
b) zapisanie objętości prostopadłościanu jako funkcji zmiennej x:

$$V(x) = x(x + 3)(10 - 2x) = -2x^3 + 4x^2 + 30x,$$

c) określenie dziedziny funkcji V: $0 < x < 5$.

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie**, przy czym jeśli zdający od razu zapisze objętość prostopadłościanu w zależności od zmiennej x, to otrzymuje punkt za część a) i punkt za część b).

<u>Drugi etap</u> składa się z trzech części:

a) wyznaczenie pochodnej funkcji V: $V'(x) = -6x^2 + 8x + 30$,

b) obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $x = 3$,

c) wyznaczenie przedziałów monotoniczności funkcji V i uzasadnienie, że dla $x = 3$ funkcja V osiąga największą wartość.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

<u>Trzeci etap</u>.

Obliczenie objętości prostopadłościanu o największej objętości: $V_{\max} = 72$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.