Przed maturą

Aleksandra Gębura

MATEMATYKA

Zadania z rozwiązaniami

Zakres podstawowy

Spis treści

1. ZANIM ROZPOCZNIESZ

Książka jest adresowana do tych, którzy chcieliby się przygotować do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym. Rozdziały od 2. do 11. odpowiadają działom z aktualnej podstawy programowej. Podzielone są na mniejsze podrozdziały, z których każdy rozpoczyna się serią zadań o rosnącym stopniu trudności, po nich następuje część podrozdziału zawierająca wskazówki lub pełne rozwiązania. Na końcu każdego rozdziału zamieszczono zestaw zadań do samodzielnego rozwiązania, złożony z dziesięciu zadań zamkniętych i pięciu otwartych. Odpowiedzi do zadań z zestawów znajdują się na końcu książki.

Jeśli chcesz naprawdę przygotować się do matury albo nauczyć się rozwiązywać zadania, to próbuj je rozwiązać samodzielnie. Zadanie już rozwiązane często wydaje się za łatwe. Zdarza się jednak, że rozwiązanie jest niezrozumiałe, bo nie jest łatwo śledzić cudzy tok rozumowania, jeśli nie podjęło się wcześniej próby samodzielnego rozwiązania postawionego problemu. Dlatego wskazówki i rozwiązania w tej książce znajdują się nie obok treści zadań, ale kilka stron dalej. Da Ci to szansę na własne próby. Jeśli rozwiążesz zadanie sam, to znajdziesz się w roli odkrywcy. Każde własne rozwiązanie jest odkryciem. I nie jest ważne, czy to odkrycie duże czy małe. Ważne, że jest Twoje. Nawet małe odkrycia są warte tego, aby je przeżyć. Kiedy wpadniesz na jakiś pomysł rozwiązania albo kiedy spotka Cię olśnienie, które następuje, gdy zrozumiesz jak rozwiązanie znaleźć – to chwila, z której nie warto rezygnować. A jak na tę chwilę zapracować, jak radzić sobie z rozwiązaniem zadania, dobrze opisał George Polya w książce *Jak to rozwiązać* (PWN, Warszawa 2009).

I. ZROZUMIENIE

Aby rozwiązać zadanie, trzeba je zrozumieć. W przypadku zadań znajdujących się w tej książce na początku każdego podrozdziału to nie jest trudne. Ale czasami treść zadania zawiera dużo informacji, które wcale nie ułatwiają procesu rozumienia. Musisz wtedy uprościć zadanie, odrzucić zbędne informacje, często zamieszczone po to, aby Cię trochę zaciekawić, aby Ci się chciało rozwiązać to zadanie. Bo nie rozwiążesz zadania, jeśli nie będziesz tego chciał.

Ustal, co jest dane albo znane, a co trzeba wykazać lub znaleźć. Jeśli Ci to ułatwi rozumienie, to sporządź rysunek, diagram, graf albo tabelę. Wprowadź oznaczenia znanych i nieznanych wielkości. Pamiętaj o tym, aby konsekwentnie trzymać się wprowadzonych oznaczeń, a także nie używać już wykorzystanej w zadaniu litery do oznaczenia innego obiektu.

Zastanów się nad tym, czy nie spotkałeś wcześniej podobnego zadania. A może jakaś część tego zadania przypomina Ci zadanie rozwiązane wcześniej? Pomyśl, co Ci sprawia trudność. Czy gdyby zadanie byłoby sformułowane inaczej, to byłoby Ci łatwiej? Czy nie jest zbyt dużo niewiadomych?

Czasami, aby rozwiązać zadanie, jego rozwiązanie trzeba podzielić na etapy. Załóżmy, że masz rozwiązać zadanie o treści:

„Dane są współrzędne wierzchołków A, B, C trójkąta ABC. Napisz równanie prostej zawierającej środkową poprowadzoną z wierzchołka A".

Co może Ci sprawiać trudność w zrozumieniu tego zadania? Co trzeba znaleźć? Równanie pewnej prostej. Jakie musisz mieć dane, aby napisać równanie prostej? Pewnie odpowiesz, że współrzędne dwóch punktów, przez które przechodzi ta prosta. A może kierunek tej prostej (współczynnik kierunkowy) i współrzędne jednego punktu? A w tym przypadku – czy wiesz, przez jakie punkty ma przejść szukana prosta? Na pewno przez A. A drugi punkt? Czy znasz wszystkie pojęcia, które użyte zostały w treści zadania? Musisz wiedzieć, co to jest środkowa w trójkącie. Jeśli nie wiesz, możesz sprawdzić. Ale zanim to zrobisz, to zastanów się, co to może być. Jakie odcinki znasz w trójkącie? Co mówi nazwa: środkowa? Jeśli spróbujesz sam znaleźć odpowiedź na pytanie, co to jest środkowa, a dopiero potem sprawdzisz, więcej Ci to da, niż gdybyś sprawdził od razu. A więc nie śpiesz się z zaglądaniem do rozwiązań zamieszczonych w tej książce. Zrób to dopiero wtedy, kiedy naprawdę utkniesz. A wracając do naszego przykładu, drugim punktem, przez który ma przechodzić szukana prosta, jest środek przeciwległego boku. Musisz go wyznaczyć. Ale to nie jest trudne, gdy masz współrzędne końców odcinka, którego środek masz znaleźć. Jak widać, rozwiązanie tego zadania składa się z dwóch etapów. Najpierw musisz wyznaczyć współrzędne środka boku BC, a potem napisać równanie prostej przechodzącej przez ten środek i punkt A. To znaczy, że po etapie ZROZUMIENIA zadania powinien nastąpić następny.

II. PLANOWANIE ROZWIĄZANIA

Ten etap jest konieczny albo przynajmniej przydatny w przypadku zadań, których rozwiązanie będzie wymagać przynajmniej dwóch etapów. Musisz wziąć pod uwagę, że właśnie z takimi zadaniami spotkasz się na maturze. Nawet zadania zamknięte, w których wybierasz jedną z kilku odpowiedzi, często wymagają rozwiązania złożonego z kilku kroków. Podzielenie rozwiązania na mniejsze etapy znacznie ułatwi Ci znalezienie rozwiązania. Czasami to właśnie ułożenie planu rozwiązania jest najważniejsze. I zdarza się, że najtrudniejsze. Na pomysł rozwiązania możesz wpaść od razu. Czasem jednak plan powstanie stopniowo dopiero wtedy, kiedy zauważysz, co możesz zrobić z danymi i sprawdzisz, czy wszystkie dane zostały wykorzystane. Pokonanie tego etapu da Ci najwięcej radości. Co może Ci pomóc w ułożeniu planu? Zastanów się, czy zetknąłeś się wcześniej z podobnym zadaniem. Może analogicznym? Może takim, które dotyczyło tego samego obiektu? Albo takim, w którym zachodziły podobne związki? Czy rozwiązanie zadania, z którym się już spotkałeś, ułatwi Ci rozwiązanie tego, które w tej chwili chcesz rozwiązać? Nie trać z oczu głównego celu zadania. Pamiętaj, do czego chcesz dojść. Typowymi zadaniami, w których ów plan rozwiązania jest widoczny i wyraźny, są zadania z geometrii analitycznej.

Pora na kolejny etap rozwiązania.

III. REALIZACJA PLANU

Na tym etapie użyj podstawień, aby uprościć wyrażenia albo wprowadzić nowe użyteczne wyrażenia, zastosuj znane wzory albo twierdzenia, pozbądź się nadmiaru niewiadomych. Jeśli masz kilka możliwości do rozważenia, to ich analiza pomoże Ci wyeliminować wszystkie poza tymi, które prowadzą do rozwiązania. Przy realizacji planu musisz pilnować poprawności wykonywanych obliczeń. Jesteśmy tylko ludźmi i czasami może nas coś rozproszyć. I wtedy – mimo że plan rozwiązania jest dobry – rozwiązanie będzie błędne z powodu popełnionych omyłek i przejęzyczeń. Zwróć uwagę na to, jakie błędy popełniasz, albo na to, kiedy je popełniasz. Może za bardzo się śpieszysz? Nie martw się, kiedy popełnisz błędy w domu. Na egzamin musisz iść wypoczęty. Pamiętaj, że omyłka na maturze może oznaczać utratę punktów.

IV. REFLEKSJA

Otrzymałeś rozwiązanie. Sprawdź je. Zastanów się, czy otrzymany wynik jest możliwy, sensowny i czy warunki zadania zostały spełnione. W szkole często popełniamy ten błąd, że uzyskane rozwiązanie kończy pracę nad zadaniem. Tymczasem to właśnie REFLEKSJA nad nim może przynieść więcej korzyści niż rozwiązanie innego zadania. Zastanów się, czy nie można by było uprościć niektórych etapów rozwiązania tego zadania. Czy można uzyskać ten sam wynik w inny prostszy sposób? Może teraz potrafisz zmodyfikować to zadanie i wymyślić inne podobne? A może potrafisz wykorzystać metodę zastosowaną w tym zadaniu do rozwiązania innego?

Refleksja nad rozwiązaniem jest bardzo ważna. Nawet jeśli skorzystasz z propozycji rozwiązania zamieszczonej w niniejszej książce, warto się zastanowić nad inną metodą. A może to właśnie Twój pomysł jest lepszy od pomysłu autorki tej książki? Cieszyłabym się bardzo, gdyby tak się stało. Bo każdy pomysł, który jest Twój, jest dla Ciebie lepszy od moich pomysłów. Pamiętaj o tym!

Życzę Ci powodzenia w rozwiązywaniu zadań, radości z własnych olśnień, zadowolenia z siebie wtedy, gdy uda Ci się wydostać z „utknięcia", i sukcesów na maturze.

2. LICZBY

2.1. Działania na liczbach

2.1.1. Wykonaj działania:

a) $30 : (-5) \cdot 4 =$

b) $(-7)^2 =$

c) $-5^2 =$

d) $-5(-4)^3 + 2(-2)^4 =$

e) $-6^2 - 2^5 =$

f) $[4(-4) - 6^2] - (-3)^2 - 2^4 =$

2.1.2. Oblicz:

a) $\frac{5}{7} + \frac{1}{14} =$

b) $\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{5}\right) =$

c) $\frac{3}{13} \cdot \frac{52}{27} =$

d) $1\frac{3}{7} \cdot 21 =$

e) $3\frac{1}{9} : 4\frac{1}{2} =$

f) $(-9) : \frac{1}{3} =$

g) $6\frac{1}{9} \cdot \left(\frac{-9}{11}\right) =$

h) $3\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{6} - \frac{1}{3} : 2 =$

i) $\dfrac{\left(-4\frac{12}{13} - \frac{2}{26}\right) \cdot 4\frac{1}{3}}{\left(-2\frac{3}{4}\right) + 3\frac{1}{2}} =$

j) $-2{,}15 : (-6{,}45) + \frac{2}{5} : 5{,}4 =$

2.1.3. Która liczba jest większa:

a) $\frac{1}{3}$ czy $0{,}33$; b) $\frac{15}{16}$ czy $\frac{14}{15}$; c) $-\frac{27}{45}$ czy $-0{,}59$; d) $\frac{26}{81}$ czy $\frac{1}{3}$?

2.1.4. Przedstaw liczbę $\frac{59}{70}$ w postaci sumy ułamków o liczniku 1.

2.1.5. Zamień ułamek okresowy $x = 0{,}(23)$ na ułamek zwykły.

2.1.6. Wykaż, że $0{,}0(8) - 0{,}0(4) = \frac{2}{45}$.

2.1.7. W pewnej liczbie dwucyfrowej zmieniono kolejność cyfr. Nowa liczba stanowi 37,5% pierwszej liczby. Podaj obie liczby.

2.1.8. Największy wspólny dzielnik dwóch liczb naturalnych wynosi 6, a ich suma jest równa 42. Znajdź te liczby.

2.1.9. Przekształć do najprostszej postaci wyrażenie $(2n-1)^2-(2n+1)^2$.

2.1.10. Oblicz: $\left(1{,}68:2\frac{1}{3}-0{,}56\right)+\left(\frac{13}{200}-0{,}4:3\frac{1}{5}\right)$.

2.1.11. Wartość potrojonego kwadratu różnicy liczb $\sqrt{15}$ i 3 jest równa:

A. $72-18\sqrt{15}$; B. 18; C. $24-6\sqrt{15}$; D. 6.

2.1.12. Pole trójkąta o bokach a, b, c możesz obliczyć ze wzoru $P=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie $p=\frac{a+b+c}{2}$. Korzystając z tego wzoru, oblicz pole trójkąta o bokach: $a=5$, $b=8$, $c=7$.

2.1.13. Oblicz sumę liczby $a=\dfrac{\left(4\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{13}-1{,}5\right)\cdot\frac{2}{3}}{\left(21{,}5-\frac{3}{5}\cdot 2{,}5\right):18}$ i odwrotności liczby $b=\dfrac{\left(7{,}5-\frac{5}{6}\right):2{,}5}{\left(6\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{30}{103}}$.

2.1.14. Jakim przedziałem jest zbiór liczb większych lub równych –4, które nie są większe niż 8?

2.1.15. Liczba x podzielona przez 5 daje resztę 3. Jeżeli m jest liczbą całkowitą, to można zapisać:

A. $x=3m+5$; B. $x=5m+3$; C. $x:5=3$; D. $x:5=m+3$.

2.1.16. Liczba a stanowi 12,5% liczby 40. Czy liczba a należy do przedziału $\langle -4, 5)$?

2.1.17. Ile liczb całkowitych należy jednocześnie do przedziałów $(-4, 2)$ i $\langle -1, 5)$?

A. 4; B. 3; C. 2; D. 8.

2.1.18. Zapisz rozwiązanie nierówności: $\frac{1}{3}(3x + 1)^2 - \left(2x - \frac{1}{2}\right) > 4x^2 - (x - 1)^2$ w postaci przedziału liczbowego. Ile liczb naturalnych należy do tego przedziału?

2.1.19. Ile liczb pierwszych należy do zbioru: $(6, 17) \cap (11, 19)$?

A.1; B.2; C.3; D. 4.

2.1.20. Liczba $a \in (-4, 6)$. Do jakiego przedziału należy liczba $b = 5a - 4$?

Wskazówki. Rozwiązania. Odpowiedzi

2.1.1.

a) $30 : (-5) \cdot 4 = -24$

Zgodnie z kolejnością działań najpierw podziel przez (–5) i wynik tego działania pomnóż przez 4.

b) $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$

Zwróć uwagę na kolejność działań.

c) $-5^2 = -5 \cdot 5 = -25$

d) $-5(-4)^3 + 2(-2)^4 = -5(-64) + 2 \cdot 16 = 352$

e) $-6^2 - 2^5 = -36 - 32 = -68$

f) $[4(-4) - 6^2] - (-3)^2 - 2^4 = [-16 - 36] - 9 - 16 =$
$= -52 - 25 = -77$

2.1.2.

a) $\frac{5}{7} + \frac{1}{14} = \frac{11}{14}$

Sprowadź do wspólnego mianownika.

b) $\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{13}{15}$

c) $\frac{3}{13} \cdot \frac{52}{27} = \frac{4}{9}$

Najpierw skróć, a potem wymnóż ułamki.

d) $1\frac{3}{7} \cdot 21 = 30$

Zamień liczby mieszane na ułamki niewłaściwe.

e) $3\frac{1}{9} : 4\frac{1}{2} = \frac{28}{9} : \frac{9}{2} = \frac{28}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{56}{81}$

f) $(-9) : \frac{1}{3} = -27$

g) $6\frac{1}{9} \cdot \left(\frac{-9}{11}\right) = -5$

h) $3\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{6} - \frac{1}{3} : 2 = \frac{7}{2} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{6} - \frac{1}{6} = 2\frac{1}{6}$

Zwróć uwagę na kolejność działań.

i) $\dfrac{\left(-4\frac{12}{13} - \frac{2}{26}\right) \cdot 4\frac{1}{3}}{\left(-2\frac{3}{4}\right) + 3\frac{1}{2}} = \dfrac{-5 \cdot \frac{13}{3}}{\frac{3}{4}} = -28\frac{8}{9}$

Pamiętaj o kolejności działań i zasadach wykonywania działań na liczbach ujemnych.

j) $-2{,}15 : (-6{,}45) + \frac{2}{5} : 5{,}4 = \frac{1}{3} + \frac{2}{27} = \frac{11}{27}$

Dokładniejszy wynik uzyskasz, wykonując działania na ułamkach zwykłych. Działania na ułamkach dziesiętnych mogą dać wynik obarczony błędem przybliżenia.

2.1.3. Wybierz odpowiednią metodę porównywania. Możesz zamienić ułamki zwykłe na dziesiętne. Możesz też podzielić pierwszą liczbę przez drugą. Jeśli wynik będzie większy od jedności, to pierwsza liczba jest większa. Możesz sprowadzić ułamki do wspólnego mianownika i porównać liczniki.

a) $\frac{1}{3} > 0{,}33$ b) $\frac{15}{16} > \frac{14}{15}$ c) $-\frac{27}{45} < -0{,}59$ d) $\frac{26}{81} < \frac{1}{3}$

2.1.4. Mianownik ułamka dzieli się przez 7 i 10, a więc wygodnie będzie obliczyć różnicę $\frac{59}{70} - \frac{7}{70}$ lub $\frac{59}{70} - \frac{10}{70}$. Otrzymany wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

W pierwszym przypadku otrzymasz $\frac{26}{35}$, a w drugim $\frac{7}{10}$.

Prostszym ułamkiem do dalszego rozkładania jest $\frac{7}{10}$. Mianownik tego ułamka dzieli się przez 2 i 5, więc możesz obliczyć różnicę $\frac{7}{10} - \frac{2}{10} = \frac{1}{2}$ albo $\frac{7}{10} - \frac{5}{10} = \frac{1}{5}$.

Odpowiedź: $\frac{59}{70} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$.

2.1.5. Zauważ, że tak zapisana liczba oznacza, że grupa cyfr 23 powtarza się w nieskończoność.
Możesz więc zapisać:

$x = 0{,}232323\ldots$ $100x = 23{,}232323\ldots$	Pomnóż obie strony tej równości przez 100. (Należy tak zrobić wtedy, kiedy w okresie ułamka są dwie cyfry. Gdyby w okresie ułamka była jedna cyfra, należałoby mnożyć przez 10). Teraz od drugiej równości stronami odejmij pierwszą.
$99x = 23.$	Wystarczy podzielić obie strony przez 99.
Odpowiedź: $x = \frac{23}{99}$.	

2.1.6.

I sposób:	
$a = 0{,}08888\ldots$ $10a = 0{,}8888\ldots$	Zapisz w odpowiedni sposób pierwszą liczbę (oznacz ją przez a). Pomnóż stronami przez 10.
$9a = 0{,}8$	Odejmij od drugiego równania pierwsze.
$a = \frac{4}{45}$	Zapisz ułamek 0,4 w postaci ułamka zwykłego i podziel równanie stronami przez 9. Otrzymasz $a = \frac{4}{45}$.
$b = 0{,}04444\ldots$ $10b = 0{,}4444\ldots$ $9b = 0{,}4$ $b = \frac{2}{45}$	Podobnie postępuj z drugą liczbą (oznaczoną przez b). Otrzymasz $b = \frac{2}{45}$.
$a - b = \frac{2}{45}$	Odejmij drugą liczbę od pierwszej.
II sposób:	
$0{,}0(8) = 0{,}08888\ldots$ $0{,}0(4) = 0{,}04444\ldots$	Zapisz liczby w odpowiedni sposób, a następnie odejmij stronami.
$0{,}0(8) - 0{,}0(4) = 0{,}0444\ldots$	Oznacz szukaną różnicę przez r.
$r = 0{,}04444\ldots$	Pomnóż stronami przez 10.
$10r = 0{,}4444\ldots$	Odejmij od drugiego równania pierwsze.
$9r = 0{,}4$	Zapisz ułamek 0,4 w postaci ułamka zwykłego i podziel równanie stronami przez 9. Otrzymasz $r = \frac{2}{45}$.

2.1.7. Jeżeli literą x oznaczysz liczbę jedności, a y – liczbę dziesiątek, to możesz daną liczbę dwucyfrową przedstawić jako $10y + x$. Liczba, którą otrzymasz, gdy zamienisz kolejność cyfr, ma postać: $10x + y$. Ułóż równanie: $10x + y = 37{,}5\% \cdot (x + 10y)$ i przekształć je do najprostszej postaci. Otrzymasz: $7x = 2y$. Zauważ, że x i y są cyframi, więc nie są większe od 9, przy czym x musi być parzyste, a y dzielić się przez 7. Zatem $x = 2$, $y = 7$.
Odpowiedź: Szukanymi liczbami są 72 i 27.

2.1.8. Oznacz szukane liczby literami *a i b.*
Zauważ, że skoro $NWD(a, b) = 6$, to $a = 6m$ i $b = 6n$, gdzie m i n są pewnymi liczbami naturalnymi względnie pierwszymi. $a + b = 42$. Zatem $6m + 6n = 42$, czyli $m + n = 7$.
Przedstaw liczbę 7 w postaci sumy dwóch liczb: $7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$.
Każda z par: (1, 6), (2, 5), (3, 4) spełnia warunki zadania. Szukanymi liczbami są iloczyny tych liczb przez 6.
Odpowiedź: $a = 6$ i $b = 36$ lub $a = 12$ i $b = 30$, lub $a = 18$ i $b = 24$.

2.1.9.

$(2n - 1)^2 - (2n + 1)^2 =$ $= (4n^2 - 4n + 1) - (4n^2 + 4n + 1) =$	Zgodnie z kolejnością działań najpierw podnieś wyrażenia w nawiasach do kwadratu, stosując odpowiednie wzory skróconego mnożenia. Wyniki zapisz w nawiasach.
$= 4n^2 - 4n + 1 - 4n^2 - 4n - 1 =$ $= -8n$	Opuść nawiasy i wykonaj redukcję wyrazów podobnych.

Odpowiedź: $-8n$.

2.1.10. W pierwszej kolejności trzeba wykonać dzielenie, ale przy dzieleniu ułamków pamiętaj, żeby je przedstawić w postaci ułamka niewłaściwego.
$(0{,}72 - 0{,}56) + (0{,}065 - 0{,}125) = 0{,}16 - 0{,}06$
Odpowiedź: 0,1.

2.1.11. Prawidłowo zapisz działanie (kwadrat różnicy musisz wziąć w nawias) i nie zapomnij o kolejności ich wykonywania.
Odpowiedź: A.

2.1.12. Najpierw oblicz $p = \dfrac{5 + 7 + 8}{2} = 10$.

$p - a = 5$, $p - b = 2$, $p - c = 3$. $P = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}$.

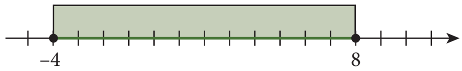
Odpowiedź: $P = 10\sqrt{3}$.

2.1.13. Oblicz najpierw liczby a i b, stosując właściwą kolejność działań.

$a = 0{,}3$ i $b = \dfrac{4}{3}$. Teraz oblicz $a + \dfrac{1}{b} = 0{,}3 + 0{,}75 = 1{,}05$.

Odpowiedź: 1,05.

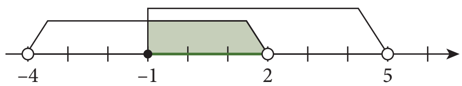
2.1.14.
Odpowiedź: $\langle -4, 8\rangle$.



2.1.15. Odpowiedź: B.

2.1.16. Najpierw oblicz a, a potem sprawdź, czy jest to liczba większa lub równa -4 i mniejsza od 5.
Odpowiedź: $a = 5$ nie należy do podanego przedziału.

2.1.17.



Odpowiedź: B.

2.1.18. Wykonaj potęgowanie dwumianów po obu stronach nierówności, pamiętając o zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia. Po wykonaniu działań otrzymasz nierówność: $x < \frac{11}{12} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{11}{12}\right)$. Do tego przedziału należy 0, nie należy 1.
Odpowiedź: Do tego przedziału należy jedna liczba naturalna.

2.1.19. Częścią wspólną podanych przedziałów liczbowych jest przedział $(11, 17)$, do którego należy tylko jedna liczba pierwsza: 13.
Odpowiedź: A.

2.1.20. Oblicz wartości b na końcach przedziału $(-4, 6)$: $5 \cdot (-4) - 4 = -24$ oraz $5 \cdot 6 - 4 = 26$.
Odpowiedź: $b \in (-24, 26)$.

2.2. Procenty. Błąd względny i bezwzględny

2.2.1. Oblicz:
a) 15% z 36;
b) liczbę o 12% większą od 30;
c) liczbę 6% mniejszą od 400;
d) liczbę, której 115% jest równe 115;
e) jakim procentem liczby 18 jest liczba 36;
f) o ile procent jest większa liczba 250 od liczby 125;

g) o ile procent jest mniejsza liczba 125 od liczby 250;
h) liczbę o 20% mniejszą od liczby o 10% mniejszej od 2300;
i) liczbę o 15% większą od liczby o 15% mniejszej od 1000.

2.2.2. Kwota z 23% VAT wynosi 2460 zł. Ile wynosi kwota netto?

2.2.3. Cena z VAT wynosi 3210 zł, a bez VAT 3000 zł. Ile procent stanowi VAT?

2.2.4. 145% pewnej liczby jest równe 29. Jaka to liczba?

2.2.5. Cena malała trzy razy o 20%. O ile procent zmalała w stosunku do pierwotnej ceny?

2.2.6. Liczba dodatnia b jest większa od liczby a o 20%. O ile procent liczba a jest mniejsza od liczby b?

2.2.7. Z 200g 6-procentowego roztworu soli odparowano wodę. Ile gramów soli pozostanie?

2.2.8. Liczba o 10% większa od liczby o 10% mniejszej od 2400 to:
A. 2640; B. 2400; C. 2376; D. 24.

2.2.9. Wpłacono 5000 zł na konto oprocentowane 3,6% w stosunku rocznym z kapitalizacją odsetek:
a) co kwartał; b) co pół roku; c) co rok.
Jaki będzie stan konta w każdym z tych przypadków po dwóch latach?

2.2.10. W banku A odsetki są kapitalizowane co kwartał, a w banku B co pół roku. Lokaty w banku A są oprocentowane w wysokości 4,8%, a w banku B – 5% w skali roku. Oferta którego z banków jest korzystniejsza, jeśli zamierzamy ulokować 10 000 zł na cztery lata?

2.2.11. Na lokatę oprocentowaną 2,5% w stosunku rocznym włożono kwotę 20 000 zł.
a) Jaki podatek od odsetek (20%) zostanie odprowadzony, jeśli pieniądze zostaną na lokacie przez 2 lata?
b) Jaki byłby podatek od odsetek, gdyby obliczany był dopiero po 2 latach oszczędzania od całej kwoty zgromadzonych odsetek?

2.2.12. Aneta wzięła 30 tys. zł kredytu o oprocentowaniu rocznym 12,04%. Ile pieniędzy będzie musiała zwrócić po dwóch latach?

2.2.13. Radek pożyczył 7000 zł na 4,8% rocznie. Pod koniec każdego roku zwraca 1600 zł. Jaki jest dług Radka po trzeciej spłacie?

2.2.14. Wartość samochodu maleje z każdym rokiem o 20%. Monika kupiła samochód za 35 000 zł. Jaka będzie wartość samochodu po 3 latach?

2.2.15. Aby zakisić ogórki, trzeba sporządzić 4-procentowy roztwór soli kuchennej. Ile soli i wody należy zmieszać, aby otrzymać 2000 g takiego roztworu?

2.2.16. Zmieszano 60 g roztworu o stężeniu 10% i 20 g roztworu o stężeniu 2%. Oblicz stężenie procentowe otrzymanego roztworu.

2.2.17. Do 575 g wody wrzucono tyle gramów siarczanu miedzi, że otrzymano roztwór 8-procentowy. Ile gramów siarczanu rozpuszczono?

2.2.18. Paweł zainwestował 20 000 zł w akcje firm A i B. Po roku wartość akcji firmy A spadła o 10%, a wartość akcji firmy B wzrosła o 15%. Inwestycja Pawła po tych zmianach była warta 22 000 zł. Ile pieniędzy ulokował Paweł w akcjach firmy A?

2.2.19. W 2012 roku miasto miało 10 000 mieszkańców. W 2013 roku przybyło 40% mieszkańców. W 2014 ubyło 40% mieszkańców. Ilu mieszkańców liczyło miasto na początku 2015 roku?

A. 10 000; B. 9600; C. 8400; D. 10 400.

2.2.20. W czerwcu 2015 r. w Polsce zarejestrowano 30 390 nowych samochodów osobowych, co oznaczało wzrost o 18% wobec poprzedniego miesiąca. Oszacuj liczbę samochodów zarejestrowanych w Polsce w maju tego roku.

2.2.21. Do ceny posiłku (bez napoju) doliczono ośmioprocentowy VAT w wysokości 0,92 zł. Jaka jest cena netto tego posiłku?

2.2.22. W kawiarni stały klient dostaje 7% rabatu. Do ceny napojów doliczany jest 23% VAT i 10% za obsługę. Procenty są naliczane po kolei, a każdy procent (zniżka, podwyżka) jest obliczany od poprzedniej kwoty. Jaka kolejność jest najkorzystniejsza dla klienta?

A. kolejność jest bez znaczenia; B. rabat, VAT, obsługa;

C. VAT, obsługa, rabat; D. rabat, obsługa, VAT.

2.2.23. Towar z 23% VAT kosztował 153,75 zł. Ile kosztowałby po obniżce VAT do 22%?

2.2.24. Klaudia zapłaciła 46,83 zł za bilet ze zniżką 33%. Jaka jest cena takiego biletu bez zniżki?

2.2.25. W wyborach prezydenckich w 2015 r. wzięło udział 55,34% uprawnionych do głosowania. Kandydat A.D. uzyskał 51,55% głosów. Jaki procent uprawnionych do głosowania oddał głos na kandydata A.D.?

2.2.26. Magda jest niższa od Beaty o 20%. O ile procent jest wyższa Beata od Magdy?

2.2.27. O ile procent wzrośnie pole kwadratu, którego bok zwiększymy o 20%?

2.2.28. Samolot lecący z prędkością 960 km/h osiąga 80% swej maksymalnej prędkości. Jaka jest maksymalna prędkość samolotu?

2.2.29. Filiżanka i spodek kosztują tyle samo. O ile procent stanieje komplet 6 filiżanek i 6 spodków, jeśli filiżanka potanieje o 4%, a spodek o 6%?
A. o 10%, B. o 5%; C. o 8%; D. o 12%.

2.2.30. Basia zrobiła zakupy i dostała paragon, na którym znalazły się kwoty: 1,89 zł, 3,6 zł, 19,99 zł, 1,11 zł, 4,20 zł, 1,95 zł, 5,19 zł, 21,75 zł, 6,99 zł, 13,16 zł, 8,99 zł, 1,96 zł, 4,9 zł. W trakcie zakupów szacowała kwotę do zapłacenia, zaokrąglając z dokładnością do 1 zł. Jaki bezwzględny i względny błąd popełniła, obliczając w ten sposób?

2.2.31. O liczbach a i b wiemy, że $a \approx 17{,}8$ i jest to przybliżenie z nadmiarem, a błąd bezwzględny tego przybliżenia wynosi 0,021 oraz że $b \approx 67{,}7$ i jest to przybliżenie z niedomiarem, a błąd bezwzględny tego przybliżenia wynosi 0,453.
a) Znajdź liczby a i b.
b) Oblicz sumę liczb a i b. Otrzymany wynik zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku, a następnie oblicz błąd bezwzględny i względny otrzymanego przybliżenia.

2.2.32. Przybliżona masa pasztetu w puszce 150 g. Jest to przybliżenie z nadmiarem. Błąd względny tego przybliżenia jest mniejszy od 0,01. Oszacuj rzeczywistą masę pasztetu.

2.2.33. Podano, że w 1564 roku w Gostyninie mieszkało 1600 osób, chociaż prawdopodobnie było ich 1572. Oblicz błąd bezwzględny i względny tego przybliżenia.

2.2.34. W którym przypadku procentowy błąd względny przybliżenia jest największy?

	A	B	C	D	E
Wartość dokładna	327 cm	985 g	123 s	4878 tys.	2347 m
Przybliżenie	3,3 m	1 kg	2 min	5 mln	2,3 km

2.2.35. Zaokrąglając liczby 23, 123, 1123, 6323 do dziesiątek, popełnisz ten sam błąd bezwzględny. W którym przypadku błąd względny będzie najmniejszy?

Wskazówki. Rozwiązania. Odpowiedzi

2.2.1.

a) 15% z 36 = $0{,}15 \cdot 36 = 5{,}4$;

b) 112% z 30 = $1{,}12 \cdot 30 = 33{,}6$;

c) 94% z 400 = $0{,}94 \cdot 400 = 376$;

d) Szukana liczba to x. Możesz zapisać $1{,}15x = 115$. Zatem $x = 115 : 1{,}15 = 100$;

e) $\frac{36}{18} \cdot 100\% = 200\%$;

f) $\frac{250}{125} \cdot 100\% - 100\% = 100\%$. Możesz też najpierw obliczyć różnicę, a potem obliczyć, jakim procentem liczby 125 jest ta różnica: $250 - 125 = 125$. To 100% liczby 125;

g) $100\% - \frac{125}{250} \cdot 100\% = 50\%$;

h) $0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 2300 = 1656$;

i) $1{,}15 \cdot 0{,}85 \cdot 1000 = 977{,}5$.

2.2.2. Oznacz kwotę netto literą N. Wtedy: $1{,}23N = 2460$. Zatem $N = 2460 : 1{,}23$.
Odpowiedź: Kwota netto $N = 2000$ zł.

2.2.3. VAT = $3210 - 3000 = 210$ (zł). Oblicz, jakim procentem liczby 3000 jest liczba 210.
Odpowiedź: 7%.

2.2.4. Odpowiedź: 20.

2.2.5. $0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot x = 0{,}512x \Rightarrow x - 0{,}512x = 0{,}488x = 48{,}8\% \cdot x$.
Odpowiedź: Cena zmalała o 48,8%.

2.2.6. Liczbę większą od liczby a o 20% można przedstawić w postaci

$b = (100 + 20) \cdot \frac{1}{100} a$.

Po skróceniu otrzymujemy $b = \frac{6}{5} a$. Przekształć to wyrażenie tak, aby obliczyć a.

$a = \frac{5}{6} b$.

Łatwo zobaczysz, że liczba a jest mniejsza od liczby b o $\frac{1}{6}$, czyli $16\frac{2}{3}$ %.

2.2.7.

I sposób:

$6\% \cdot 200 \text{ g} = \frac{6}{100} \cdot 200 = 12 \text{ g}$

II sposób:

W 100 g roztworu jest 6 g soli, zatem w 200 g roztworu jest 12 g soli.

Odpowiedź: 12 g.

2.2.8.

I sposób:

$10\% \cdot 2400 = 240$;
$2400 + 240 = 2640$;
$10\% \cdot 2640 = 264$;
$2640 - 264 = 2376$.

II sposób:

Liczba o 10% mniejsza od 2400 to: $90\% \cdot 2400$, czyli $0{,}9 \cdot 2400 = 2160$. Liczba o 10% większa od 2160 to: $110\% \cdot 2160 = 1{,}1 \cdot 2160 = 2376$.

III sposób:

$0{,}9 \cdot 1{,}1 \cdot 2400 =$
$= 0{,}99 \cdot 2400 = 2376$.

Odpowiedź: C.

2.2.9.

a) Odsetki będą kapitalizowane 8 razy, a oprocentowanie odpowiadające kwartałowi wyniesie: $0{,}25 \cdot 3{,}6 = 0{,}69$. Po dwóch latach stan konta wyniesie:

$$K_8 = 5000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}9}{100}\right)^8 = 5000 \cdot 1{,}009^8 = 5371{,}55 \text{ zł}.$$

b) Odsetki będą kapitalizowane cztery razy, a procent przypadający na jedno półrocze jest równy: $\frac{1}{2} \cdot 3{,}6 = 1{,}8\%$. Stan konta wyniesie:

$$K_4 = 5000 \cdot \left(1 + \frac{1{,}8}{100}\right)^4 = 5369{,}84 \text{ zł}.$$

c) Odsetki będą kapitalizowane dwa razy, więc w tym wypadku stan konta wyniesie:

$$K_2 = 5000 \cdot \left(1 + \frac{3{,}6}{100}\right)^2 = 5000 \cdot 1{,}036^2 = 5366{,}48 \text{ zł}.$$

2.2.10. Oblicz kwotę znajdującą się na koncie w obu przypadkach. Pamiętaj, ile razy kapitalizowane są odsetki w obu przypadkach i o tym, że w treści zadania podane jest oprocentowanie w skali roku.

bank A	bank B
$K_{16} = 10\,000\left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{4{,}8}{100}\right)^{16} = 12\,102{,}87$	$K_4 = 10\,000\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100}\right)^{8} = 12\,184{,}03$

Odpowiedź: Korzystniejsza jest oferta banku B.

2.2.11.

a) Po roku: odsetki wyniosą: $20\,000 \cdot 0{,}025 = 500$.
   Podatek od odsetek: $500 \cdot 0{,}2 = 100$ (zł).
   Po dwóch latach odsetki wyniosą: $20\,000 \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}8) \cdot 0{,}025$, gdyż należało dopisać tylko 80% odsetek, czyli to, co pozostało po odprowadzeniu podatku, a podatek: $20\,000 \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}8) \cdot 0{,}025 \cdot 0{,}2 = 102$ (zł).
   Odpowiedź: Odprowadzony w ciągu dwóch lat podatek wyniesie:
   $100 + 102 = 202$ (zł).

b) Kwota na koncie po dwóch latach: $20\,000 \cdot 1{,}025^2$, odsetki: $20\,000 \cdot (1{,}025^2 - 1)$, a podatek od odsetek: $20\,000 \cdot (1{,}025^2 - 1) \cdot 0{,}2 = 202{,}5$ (zł).
   Odpowiedź: Podatek liczony od całej kwoty odsetek po dwóch latach wyniósłby 202,5 zł.

2.2.12. Odpowiedź: 37 658,88 zł.

2.2.13. Po pierwszym roku: $7000 \cdot 1{,}048 = 7336$.
Po pierwszej spłacie: $7336 - 1600 = 5736$. Podobnie oblicz, ile zostanie do spłaty po drugim i po trzecim roku.
Odpowiedź: 3023,07 zł.

2.2.14.

I sposób:	II sposób:	III sposób:
Po roku: $35\,000 \cdot 0{,}2 = 7000$	Po roku:	$W = 35\,000 \cdot (1 - 0{,}2)^3$
$35\,000 - 7000 = 28\,000$.	$35\,000 \cdot 0{,}8 = 28\,000$;	$W = 35\,000 \cdot 0{,}8^3$
Po dwóch latach: $28\,000 \cdot 0{,}2 = 5600$	Po dwóch latach:	$W = 17\,920$.
$28\,000 - 5600 = 22\,400$.	$28\,000 \cdot 0{,}8 = 22\,400$;	
Po trzech latach: $22\,400 \cdot 0{,}2 = 4480$	Po trzech latach:	
$22\,400 - 4480 = 17\,920$.	$22\,400 \cdot 0{,}8 = 17\,920$.	

Odpowiedź: Po czterech latach wartość samochodu wyniesie 17 920 zł.

2.2.15. Oznacz: x – masa soli,
$x = 4\% \cdot 2000\text{ g} = 4 \cdot 20\text{ g} = 80\text{ g}$.
Masa wody: $2000\text{ g} - 80\text{ g} = 1920\text{ g}$.
Odpowiedź: Trzeba zmieszać 80 g soli i 1920 g wody.

2.2.16. $10\% \cdot 60 + 2\% \cdot 20 = x\% \cdot (60 + 20)$
$0{,}1 \cdot 60 + 0{,}02 \cdot 20 = 0{,}8x$
$6{,}4 = 0{,}8x \Rightarrow x = 8$.
Odpowiedź: Stężenie otrzymanego roztworu jest równe 8%.

2.2.17. Oznacz przez m masę siarczanu miedzi w gramach. $8\% \cdot (575 + m) = m$. Rozwiąż to równanie.
Odpowiedź: Rozpuszczono 50 g siarczanu.

2.2.18. Oznacz x – kwotę pieniędzy zainwestowaną w akcje firmy A, y – w akcje firmy B. Oto równania odpowiadające opisanej sytuacji:
$x + y = 20\,000$ oraz $0{,}9x + 1{,}15y = 22\,000$.
Wystarczy rozwiązać układ tych równań.
Odpowiedź: 4000 zł.

2.2.19. Jak wiesz, 140% to 1,4. Podobnie, 60% to 0,6. Sytuację możesz opisać działaniem: $1,4 \cdot 0{,}6 \cdot 10\,000$. Wykonaj obliczenia.
Odpowiedź: C.

2.2.20. Odpowiedź: Około 25 754 aut.

2.2.21. Odpowiedź: 11,5 zł.

2.2.22. Oznacz przez x – cenę netto napoju (bez rabatu, podatku VAT i obsługi) i oblicz kwotę końcową jako iloczyn: $93\% \cdot 123\% \cdot 110\% \cdot x = 0{,}93 \cdot 1{,}23 \cdot 1{,}1 \cdot x$. Mnożenie jest przemienne, więc kolejność nie ma znaczenia.
Odpowiedź: A.

2.2.23. Odpowiedź: 152,5 zł.

2.2.24. Odpowiedź: 69,90 zł.

2.2.25. Możesz wykonać działania na ułamkach, a potem zamienić ułamek na odpowiadający mu procent. $0{,}5534 \cdot 0{,}5155 = 0{,}2853$.
Odpowiedź: 28,53%.

2.2.26. Odpowiedź: O 25%.

2.2.27. Odpowiedź: O 44%.

2.2.28. Oznacz literą v maksymalną prędkość samolotu. Wtedy $80\% \cdot v = 960$.
Zatem $v = 960 : 0{,}8 = 1200$.
Odpowiedź: Maksymalna prędkość tego samolotu to 1200 km/h.

2.2.29. Możesz to obliczyć na kilka sposobów. Spodek i filiżanka mają taką samą cenę i jest ich tyle samo w komplecie, a więc obniżkę możesz obliczyć na przykład jako średnią arytmetyczną podanych obniżek. Komplet potanieje o 5%.
Odpowiedź: B.

2.2.30. Zaokrąglij każdą z kwot, zgodnie z zasadami. Oblicz sumę przybliżeń: $2 + 4 + 20 + 1 + 4 + 2 + 5 + 22 + 7 + 13 + 9 + 2 + 5 = 96$ (zł). Basia zapłaciła 95,68 zł.

Zatem bezwzględny błąd wynosi 0,32 zł, a względny $\frac{0,32}{95,68} \approx 0,3\%$.

2.2.31.

a) Jeżeli 17,8 jest przybliżeniem liczby a z nadmiarem, to liczba a jest mniejsza od 17,8 o 0,021. Zatem $a = 17,8 - 0,021 = 17,779$.
Analogicznie, jeżeli 67,7 jest przybliżeniem liczby b z niedomiarem, to $b = 67,7 + 0,453 = 68,153$.

b) $a + b = 85,932 \approx 85,9$. Jest to przybliżenie z niedomiarem, a więc błąd bezwzględny tego przybliżenia jest równy różnicy $85,932 - 85,9 = 0,032$.
Błąd względny to $(0,032 : 85,932) \cdot 100\% \approx 0,04\%$.

2.2.32. Błąd względny $b_w = \frac{|r - p|}{|r|}$, gdzie $p = 150$. W tym przypadku $r < p$, gdyż przybliżenie p jest z nadmiarem, zatem warunek, który należy rozwiązać, przyjmie postać: $\frac{150 - r}{r} < \frac{1}{100}$.

Po rozwiązaniu otrzymasz: $r > 148,51$. Z założenia wynika, że $r < 150$.
Odpowiedź: Rzeczywista masa pasztetu r spełnia warunek: $148,51 < r < 150$.

2.2.33. Błąd bezwzględny: $b_b = 28$.
Błąd względny: $b_w = 0,0178 = 1,78\%$.

2.2.34.

	A	B	C	D	E
błąd bezwzględny	3 cm	15 g	3 s	122 tys.	47 m
błąd względny w %	0,92	1,52	2,44	2,5	2

Odpowiedź: Największy błąd względny jest w przypadku D.

2.2.35. Błąd względny będzie najmniejszy, gdy wartość dokładna będzie największa, czyli w ostatnim przypadku.

2.3. Potęgi. Pierwiastki. Logarytmy

2.3.1. Oblicz:

a) $\sqrt{0{,}01} =$ b) $\sqrt{0{,}0009} =$ c) $\sqrt{1\frac{155}{169}} =$

d) $\sqrt{5\sqrt{25}} =$ e) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} =$ f) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} =$

2.3.2. Wyłącz czynnik spod znaku pierwiastka:

a) $\sqrt{50} =$ b) $\sqrt[3]{16} =$ c) $2\sqrt{32} =$ d) $\sqrt[3]{(-81)} =$

2.3.3. Zapisz w najprostszej postaci: $5\sqrt{27} - 2\sqrt{48} + 2\sqrt{12}$.

2.3.4. Wykonaj działania i przedstaw w najprostszej postaci:

a) $5\sqrt{2} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} =$ b) $7\sqrt{2} \cdot (3 - \sqrt{2}) =$

c) $\sqrt{27} - 3\sqrt{3} =$ d) $(1 - 2\sqrt{5})(1 + 2\sqrt{5}) =$

e) $\frac{2\sqrt{5}}{3} - \frac{\sqrt{5}}{2} =$ f) $(2\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 2) =$

g) $\sqrt{\frac{3}{16}} - \sqrt{\frac{3}{9}} =$ h) $9\sqrt{45} - 2\sqrt{80} =$

i) $5\sqrt[3]{24} - 2\sqrt[3]{(-54)} =$ j) $\sqrt{13^2 - 12^2} =$

2.3.5. Wykonaj działania i przedstaw w najprostszej postaci:

a) $(3\sqrt{3} - 2)^2 =$ b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28} =$

c) $2\sqrt[3]{2}(5\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{32}) =$ d) $(2\sqrt[3]{12})(3\sqrt[3]{18}) =$

2.3.6. Wykaż, że $\sqrt[3]{\sqrt{729}} = 3$.

2.3.7. Wyłącz największy czynnik przed znak pierwiastka $\sqrt[3]{16x^4y^8z^7}$, gdzie x, y, z są dodatnimi liczbami rzeczywistymi.

2.3.8. Oblicz wartość wyrażenia $9x + \sqrt{25 - 10x + x^2}$ dla $x = 1$.

2.3.9. Oblicz: $\dfrac{\left(\sqrt{12\frac{1}{4}}+\sqrt{3+\dfrac{13}{4}}\right):2+2\cdot\sqrt{1\dfrac{15}{49}}:1\dfrac{1}{7}}{\sqrt{\dfrac{25}{36}}}$.

2.3.10. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\dfrac{7}{3\sqrt{3}}=$ b) $\dfrac{7+\sqrt{7}}{7-\sqrt{7}}=$ c) $\dfrac{27\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9}}=$

d) $\dfrac{7}{\sqrt[3]{49}}=$ e) $\dfrac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=$ f) $\dfrac{2\sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{6}}=$

2.3.11. Oblicz iloraz sumy liczb $3\sqrt{3}$ i $2\sqrt{6}$ przez ich różnicę.

2.3.12. Oblicz wartość wyrażenia $\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$ dla $x=\sqrt{3}+1$.

2.3.13. Uzasadnij, że liczba $\dfrac{7}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$ jest liczbą całkowitą.

2.3.14. Zapisz w postaci jednej potęgi:

a) $25^2\cdot5^5=$ b) $5^{123}:5^{101}=$ c) $(121^2)^3\cdot11^{-2}=$

d) $16\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}=$ e) $\dfrac{1}{\left(\dfrac{7}{3}\right)^{-2}}=$ f) $17^{-2}:17^{-5}=$

g) $0{,}5\cdot(2^3\cdot2^{112})^{-2}=$ h) $15\cdot3^{17}-6\cdot3^{17}=$ i) $\dfrac{5}{6}\cdot2^{14}-\dfrac{1}{3}\cdot2^{14}=$

j) $0{,}5\cdot3^{123}+8{,}5\cdot3^{123}=$ k) $5^{12}+5^{12}+3\cdot5^{12}=$ l) $17\cdot2^{14}-4^7=$

2.3.15. Oblicz:

a) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5=$ b) $\left(1\dfrac{1}{5}\right)^2=$ c) $0{,}1^2+2\cdot0{,}2^2-0{,}3^2=$

d) $27^{\frac{1}{3}}=$ e) $49^{\frac{1}{2}}=$ f) $\left(5\dfrac{11}{49}\right)^{\frac{1}{2}}=$

g) $125^{\frac{2}{3}}=$ h) $32^{-\frac{3}{5}}=$ i) $49^{\frac{1}{2}}\cdot64^{\frac{1}{3}}=$

j) $216^{\frac{2}{3}}:6^2=$

2.3.16. Porównaj liczby a i b, jeśli: $a = \dfrac{\sqrt[3]{27} + \left(1\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}}{8^0 + \left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}}$ i $b = \dfrac{3^{-1} \cdot \sqrt{20 + 2^{-2}}}{4^{-\frac{1}{2}}}$.

2.3.17. Zapisz w postaci jednej potęgi: $2 \cdot 5^{201} + 3 \cdot 5^{201}$.

2.3.18. Zapisz w postaci jednej potęgi: $\dfrac{27^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{-2}}{3^{-0,5}}$.

2.3.19. Zapisz w postaci potęgi liczby 10:

a) $10\,000^3 =$

b) $(0,0001)^{-3} =$

c) $(0,01)^2 \cdot 10^2 : 100^{-3} =$

d) $1000^{-3} \cdot 0,001^{-4} =$

2.3.20. Wykonaj działania:

a) $(3a^2)^2 =$

b) $(-4b^3)^2 =$

c) $\left(\dfrac{2x^{-2}}{3x^3}\right)^3 =$

d) $(3x^{-1} + 2x^{-2} + x^{-3}) \cdot 4x^3 =$

2.3.21. Uporządkuj rosnąco liczby: 2^{-2}, $16^{\frac{1}{3}}$, $(0,5)^{2,1}$, $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-0,5}$, $0,5^{\sqrt{2}}$.

2.3.22. Która liczba jest większa: 2^{655} czy 3^{327}?

2.3.23. Wykaż, że wartość liczbowa wyrażenia $2^{126} - 2^{123} - 9 \cdot 2^{122}$ jest wielokrotnością liczby 10.

2.3.24. Na egzamin przygotowano 25 pytań z dwiema odpowiedziami do wyboru i 15 pytań z 4 odpowiedziami do wyboru. Ile było możliwych odpowiedzi?

2.3.25. Wykonaj działania. Wynik przedstaw w notacji wykładniczej.

a) $0,00125 \cdot 8 \cdot 10^{11} =$

b) $\dfrac{10,74 \cdot 10^{-7}}{5,37 \cdot 10^{-8}} =$

c) $8,5 \cdot 10^5 : 2 \cdot 10^{-13} =$

d) $\dfrac{14\,400\,000\,000}{0,00012} =$

2.3.26. Masa protonu jest równa $1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ kg. Masa Ziemi – $6 \cdot 10^{24}$ kg. Ile razy masa Ziemi jest większa od masy protonu?
A. $3{,}59 \cdot 10^{-3}$ razy; B. $3{,}59 \cdot 10^{51}$ razy; C. $3{,}59 \cdot 10^{-51}$ razy; D. $3{,}59 \cdot 10^{3}$ razy.

2.3.27. Średnia odległość Marsa od Słońca jest równa $2{,}28 \cdot 10^{8}$ km, a Plutona – $6 \cdot 10^{9}$ km. Ile razy odległość Plutona od Słońca jest większa od odległości Marsa od Słońca?

2.3.28. Masa Jowisza jest równa $M = 1{,}8986 \cdot 10^{27}$ kg. Masa Io, jednego z jego księżyców, jest równa $m = 8{,}93 \cdot 10^{22}$ kg. Odległość Io od Jowisza średnio wynosi $r = 4{,}21 \cdot 10^{8}$ m.
Z jaką siłą grawitacji oddziałuje Jowisz na Io? Skorzystaj ze wzoru na siłę grawitacji:

$$F = G\frac{M \cdot m}{r^2}, \text{ gdzie } G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}.$$

2.3.29. Atom węgla ma wielkość około $c = 1{,}24 \cdot 10^{-10}$ m, a wirus $w = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$ m. Ile razy wirus jest większy od atomu węgla?

2.3.30. W próbce znajduje się $N_0 = 6{,}4 \cdot 10^{17}$ atomów promieniotwórczego azotu ^{13}N. Okres połowicznego rozpadu tego izotopu wynosi $T_{0,5} = 10$ minut. Oblicz, ile atomów jodu zostanie po upływie godziny? Skorzystaj ze wzoru: $N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{0,5}}}$, gdzie N_0 – początkowa liczba atomów, N – liczba atomów po upływie czasu t.

Tabela przedstawia natężenie wybranych źródeł dźwięku. Wykorzystaj dane z tabeli w zadaniu 2.3.31. i 2.3.32.

Źródło	Natężenie dźwięku [W/m²]	Źródło	Natężenie dźwięku [W/m²]
szept ledwo słyszalny	10^{-12}	pociąg	10^{-4}
szelest liści	10^{-11}	młot pneumatyczny	10^{-2}
rozmowa	10^{-9} do 10^{-8}	startujący odrzutowiec	1
odkurzacz	10^{-5}	próg bólu	10^{2}

2.3.31. Ile razy natężenie dźwięku startującego odrzutowca jest większe od natężenia dźwięku pracującego odkurzacza?
A. 10 000 razy; B. 0,00001 razy; C. 0,0001 razy; D. 100 000 razy.

2.3.32. O ile W/m^2 natężenie dźwięku najgłośniejszej rozmowy jest większe od natężenia dźwięku najcichszej rozmowy?
A. o $10\,W/m^2$; B. o $10^{-1}\,W/m^2$; C. o $9 \cdot 10^{-9}\,W/m^2$; D. o $9000\,W/m^2$.

2.3.33. Zamień pierwiastek na potęgę:

a) $\sqrt[5]{5^3} =$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3^2}} =$ c) $\sqrt[7]{16} =$ d) $\sqrt{\sqrt[5]{11^3}} =$

2.3.34. Zamień potęgę na pierwiastek:

a) $5^{\frac{2}{5}} =$ b) $9^{-\frac{1}{3}} =$ c) $\left(3^{-2}\right)^{\frac{1}{3}} =$

2.3.35. Uzasadnij, że $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2 = 10$.

2.3.36. Wykonaj działania: $\left(7-13^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(7+13^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

2.3.37. Oblicz: $\left[\left(8-28^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(8+28^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$.

2.3.38. Przedstaw wyrażenie w postaci potęgi liczby 3: $\left(9^{\frac{1}{4}} \cdot 27^{\frac{1}{5}}\right) : \left(\sqrt{3}\right)^{\frac{4}{5}}$.

2.3.39. Zapisz w postaci potęgi bez użycia symbolu pierwiastka: $\left(7^{12}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[5]{7^6}$.

2.3.40. Zapisz w najprostszej postaci: $\dfrac{11^{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{121} \cdot 11^{-\frac{1}{5}}}{\left(121^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 11^{\frac{2}{3}}}$.

2.3.41. Oblicz: $\dfrac{12^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} + \dfrac{45^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}}}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}}}$.

2.3.42. Oblicz:
a) $\log_5 625 =$ b) $\log_{0,9} 0,81 =$ c) $\log 0,001 =$
d) $\log_6\left(\dfrac{1}{216}\right) =$ e) $\log_2(\log_3 81) =$ f) $\log_5(\log 10) =$
g) $\log_{0,1}(\log_6 6) =$ h) $\log_3\sqrt{3} =$

2.3.43. Oblicz x:

a) $\log_5 x = -3$ b) $\log_3 x = 0$ c) $\log x = -1$ d) $\log_x 0{,}25 = 2$

2.3.44. Wiedząc, że $\log 3 = a$ i $\log 8 = b$, oblicz:

a) $\log 24 =$ b) $\log 64 =$ c) $\log 8\sqrt{3} =$

d) $\log \sqrt[3]{3^5} =$ e) $\log \dfrac{64}{3} =$ f) $\log \dfrac{8}{9} =$

2.3.45. Wyznacz x, jeśli:

a) $\log 2x + \log 5 = 2$ b) $\log 5 + \log 5x = 3$

c) $\log\left(x + \sqrt{3}\right) + \log\left(x - \sqrt{3}\right) = 0$ d) $\log(200 - x) = 2$

2.3.46. Oblicz:

a) $5\log_3 9 + 7\log_2 8 =$ b) $6\log_2 64 - \log_7 49 =$

c) $\log_6 3 + \log_6 12 =$ d) $\log_6 108 - \log_6 18 =$

2.3.47. Zapisz jako jeden logarytm:

a) $3\log 6 + 5\log 2 =$ b) $4\log 2 - 2\log 8 =$

c) $5\log 3 =$ d) $5\log 7 + 3\log 11 =$

2.3.48. Jeżeli $250 = 3^x$, to:

A. $\log_3 x = 250$; B. $\log_x 3 = 250$; C. $\log_x 250 = 3$; D. $\log_3 250 = x$.

2.3.49. Wyrażenie $2\log x - \log y + 3\log z$ jest równe:

A. $\log \dfrac{2x \; + 3z}{y}$; B. $\log \dfrac{x^2 z^3}{y}$; C. $\log(2x - y + 3z)$; D. $\log \dfrac{x^2}{yz^3}$.

2.3.50. Wiedząc, że $\log_2 3 = 1{,}59$ i $\log_2 7 = 2{,}81$, oblicz:

a) $\log_2 21 =$ b) $\log_2 81 =$ c) $\log_2 \dfrac{49}{9} =$

2.3.51. Oblicz w:

a) $w = 3^{\log_3 17}$ b) $w = 23^{2\log_{23} 12}$ c) $w = 3^{2\log_3 5 - \log_3 \frac{1}{8}}$

2.3.52. Skalę Richtera (S_R) służącą do określania siły trzęsienia ziemi można opisać wzorem $S_R(A) = \log A$, gdzie A jest amplitudą fali sejsmicznej.

a) Oblicz, o ile wzrośnie siła trzęsienia ziemi, jeśli amplituda A wzrośnie sto razy.

b) Wartość S_R wzrosła o trzy jednostki. Jaki był wzrost amplitudy A?

c) Trzęsienie ziemi 27 kwietnia 2015 roku w Indiach miało siłę 5,1 w skali Richtera. Dwa dni wcześniej było 500 razy większe trzęsienie ziemi w Nepalu. Jaką siłę w skali Richtera miało trzęsienie ziemi w Nepalu? Przyjmij $\log 5 = 0{,}7$.

2.3.53. Uzasadnij, że $\dfrac{3^{\log_2 40}}{3^{\log_2 5}} = 27$.

2.3.54. Porównaj liczby x, y, z, gdy: $\log_x\sqrt{5} = \dfrac{1}{2}$, $\log_{\sqrt{5}} y = 2$, $\log_2 32 = z$.

Wskazówki. Rozwiązania. Odpowiedzi

2.3.1.

a) $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$; b) $\sqrt{0{,}0009} = 0{,}03$; c) $\sqrt{1\dfrac{155}{169}} = \sqrt{\dfrac{324}{169}} = \dfrac{18}{13}$;

d) $\sqrt{5\sqrt{25}} = \sqrt{5\cdot 5} = 5$; e) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$; f) $\sqrt[3]{2\dfrac{10}{27}} = \sqrt[3]{\dfrac{64}{27}} = \dfrac{4}{3}$.

2.3.2.

a) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$; b) $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$; c) $2\sqrt{32} = 8\sqrt{2}$; d) $\sqrt[3]{(-81)} = -3\sqrt[3]{3}$.

2.3.3. Zauważ, że $\sqrt{27} = \sqrt{9\cdot 3} = 3\sqrt{3}$, $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ i $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Wykonaj wskazane działania.
Odpowiedź: $11\sqrt{3}$.

2.3.4.

a) $5\sqrt{2} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{3} + 7\sqrt{2}$; b) $7\sqrt{2}\cdot\left(3-\sqrt{2}\right) = 21\sqrt{2} - 14$;

c) $\sqrt{27} - 3\sqrt{3} = 0$; d) $\left(1-2\sqrt{5}\right)\left(1+2\sqrt{5}\right) = -19$;

e) $\dfrac{2\sqrt{5}}{3} - \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$; f) $\left(2\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+2\right) = 8 + 3\sqrt{5}$;

g) $\sqrt{\dfrac{3}{16}} - \sqrt{\dfrac{3}{9}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{12}$; h) $9\sqrt{45} - 2\sqrt{80} = 19\sqrt{5}$;

i) $5\sqrt[3]{24} - 2\sqrt[3]{(-81)} = 16\sqrt[3]{3}$; j) $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$.

2.3.5.

a) $\left(3\sqrt{3} - 2\right)^2 = 27 - 12\sqrt{3} + 4 = 31 - 12\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28} = 14$;

c) $2\sqrt[3]{2}\left(5\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{32}\right) = 4$;

d) $\left(2\sqrt[3]{12}\right)\left(3\sqrt[3]{18}\right) = 36$.

2.3.6. Możesz zastosować własność $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$. Otrzymasz wtedy $\sqrt[6]{729} = 3$.

Możesz też najpierw obliczyć wewnętrzny pierwiastek $\sqrt{729} = 27$, a następnie $\sqrt[3]{27} = 3$.

2.3.7. Zauważ, że $16 = 2^4 = 2 \cdot 2^3$.
Podobnie $x^4 = x \cdot x^3$, $y^8 = y^2 \cdot (y^2)^3$ i $z^7 = z \cdot (z^2)^3$.
Odpowiedź: $2xy^2z^2 \cdot \sqrt[3]{2xy^2z}$.

2.3.8.

I sposób:
Podstaw $x = 1$:
$9 + \sqrt{25 - 10 + 1^2} = 9 + \sqrt{16} = 13$.

II sposób:
Przekształć wyrażenie do najprostszej postaci:
$9x + \sqrt{(5 - x)^2} = 9x + |5 - x|$.
Podstaw $x = 1$:
$9 + |4| = 13$.

Odpowiedź: 13.

2.3.9. Zanim obliczysz wartości pierwiastków z liczb mieszanych, musisz je przedstawić w postaci ułamków niewłaściwych. Pamiętaj o kolejności działań.
Odpowiedź: 6.

2.3.10.

a) $\dfrac{7}{3\sqrt{3}}$

Należy pomnożyć licznik i mianownik ułamka przez $\sqrt{3}$.
Odpowiedź: $\dfrac{7}{9}\sqrt{3}$.

b) $\dfrac{7 + \sqrt{7}}{7 - \sqrt{7}}$

Należy pomnożyć licznik i mianownik ułamka przez $\left(7 + \sqrt{7}\right)$. Pamiętaj o tym, aby wziąć licznik i mianownik w nawias. Teraz w mianowniku skorzystaj z wzoru skróconego mnożenia: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, a w liczniku ze wzoru: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Odpowiedź: $\dfrac{\left(4 + \sqrt{3}\right)}{3}$.

c) $\frac{27\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9}}$	Zauważ, że w mianowniku masz $\sqrt[3]{3^2}$, zatem aby usunąć niewymierność z mianownika, wystarczy pomnożyć licznik i mianownik przez $\sqrt[3]{3}$. Odpowiedź: $9\sqrt[3]{9}$.
d) $\frac{7}{\sqrt[3]{49}}$	Pomnóż licznik i mianownik przez $\sqrt[3]{7}$. Odpowiedź: $\sqrt[3]{7}$.
e) $\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$	Licznik i mianownik pomnóż przez $\sqrt{7}$. Pamiętaj o wzięciu licznika w nawias. Odpowiedź: $\frac{7+\sqrt{7}}{7}$.
f) $\frac{2\sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{6}}$	Licznik i mianownik pomnóż przez $\sqrt[3]{6^2}$. Odpowiedź: $2\sqrt[3]{6}$.

2.3.11. Wskazówka: Zapisz iloraz w postaci ułamka i usuń niewymierność z mianownika.
Odpowiedź: $17 + 12\sqrt{2}$.

2.3.12.
I sposób:

$\frac{(x-1)^2}{x-1}$	Przekształć licznik wyrażenia, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.
$(x - 1)$	Możesz skrócić ułamek przez $(x - 1)$, ponieważ $x \neq 1$.
$\sqrt{3} + 1 - 1$	Oblicz wartość wyrażenia, podstawiając $x = \sqrt{3} + 1$.

II sposób:

$\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2 - 2\left(\sqrt{3}+1\right)+1}{\sqrt{3}+1-1}$	Podstaw $x = \sqrt{3} + 1$.
$\frac{\left(3+2\sqrt{3}+1\right) - 2\left(\sqrt{3}+1\right)+1}{\sqrt{3}}$	Wykonaj działania w liczniku i mianowniku.
$\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$	Usuń niewymierność z mianownika, albo skróć ułamek, korzystając z faktu, że $3 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$.

Odpowiedź: Wartość wyrażenia jest równa $\sqrt{3}$.

2.3.13. Wskazówka: Usuń niewymierności z mianowników. Otrzymasz wtedy pewną sumę. Po wykonaniu działań otrzymasz liczbę 2, która jest liczbą całkowitą.

2.3.14.

a) $25^2 \cdot 5^5 = (5^2)^2 \cdot 5^5 = 5^9$;

b) $5^{123} : 5^{101} = 5^{22}$;

c) $(121^2)^3 \cdot 11^{-2} = 11^{10}$;

d) $16 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = 2^4 \cdot 2^3 = 2^7$;

e) $\dfrac{1}{\left(\dfrac{7}{3}\right)^{-2}} = \left(\dfrac{7}{3}\right)^2$;

f) $17^{-2} : 17^{-5} = 17^3$;

g) $0{,}5 \cdot (2^3 \cdot 2^{112})^{-2} = 2^{-231}$;

h) $15 \cdot 3^{17} - 6 \cdot 3^{17} = 9 \cdot 3^{117} = 3^2 \cdot 3^{17} = 3^{19}$;

i) $\dfrac{5}{6} \cdot 2^{14} - \dfrac{1}{3} \cdot 2^{14} = \left(\dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{3}\right) \cdot 2^{14} = 2^{-1} \cdot 2^{14} = 2^{13}$;

j) $0{,}5 \cdot 3^{123} + 8{,}5 \cdot 3^{123} = 9 \cdot 3^{123} = 3^{125}$;

k) $5^{12} + 5^{12} + 3 \cdot 5^{12} = 5 \cdot 5^{12} = 5^{13}$;

l) $17 \cdot 2^{14} - 4^7 = 17 \cdot 2^{14} - 2^{14} = 16 \cdot 2^{14} = 2^{18}$.

2.3.15.

a) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5 = -\dfrac{1}{32}$;

b) $\left(1\dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{36}{25}$;

c) $0{,}1^2 + 2 \cdot 0{,}2^2 - 0{,}3^2 = 0$;

d) $27^{\frac{1}{3}} = 3$;

e) $49^{\frac{1}{2}} = \left(7^2\right)^{\frac{1}{2}} = 7$;

f) $\left(5\dfrac{11}{49}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{256}{49}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\dfrac{2}{7}$;

g) $125^{\frac{2}{3}} = \left(5^3\right)^{\frac{2}{3}} = 5^2 = 25$;

h) $32^{-\frac{3}{5}} = \left(2^5\right)^{-\frac{3}{5}} = 2^{-3} = \dfrac{1}{8}$;

i) $49^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{\frac{1}{3}} = 7 \cdot 4 = 28$;

j) $216^{\frac{2}{3}} : 6^2 = \left(6^3\right)^{\frac{2}{3}} : 6^2 = 1$.

2.3.16. Należy każde z wyrażeń przedstawić w najprostszej postaci. Zauważ, że aby łatwo obliczyć pierwiastek z liczby mieszanej, należy przedstawić ją w postaci ułamka niewłaściwego.

Odpowiedź: $a = 3$, $b = 3$, a więc $a = b$.

2.3.17. Zauważ, że $2a + 3a = 5a$. Wystarczy sumę z lewej strony zapisać w postaci iloczynu i wykonać działania na potęgach.
Odpowiedź: 5^{202}.

2.3.18. Zauważ, że podstawą każdej występującej w wyrażeniu potęgi jest liczba 3.
Odpowiedź: 3^{-2}.

2.3.19. Zapisz w postaci potęgi liczby 10:
a) $10\,000^3 = (10^4)^3 = 10^{12}$;
b) $(0{,}0001)^{-3} = (10^{-4})^{-3} = 10^{12}$;
c) $(0{,}01)^2 \cdot 10^2 : 100^{-3} = 10^{-4+2} : 10^{-6} = 10^{-2+6} = 10^4$;
d) $1000^{-3} \cdot 0{,}001^{-4} = 10^3$.

2.3.20. Wykonaj działania:
a) $(3a^2)^2 = 9a^4$;
b) $(-4b^3)^2 = 16b^6$;
c) $\left(\dfrac{2x^{-2}}{3x^3}\right)^3 = \dfrac{8x^{-6}}{27x^9} = \dfrac{8}{27}x^{-15}$;
d) $(3x^{-1} + 2x^{-2} + x^{-3}) \cdot 4x^3 = 12x^2 + 8x + 4$.

2.3.21. Przedstaw każdą z liczb w postaci potęgi liczby 2, a następnie uporządkuj, poczynając od najmniejszego wykładnika do największego.

Odpowiedź: $(0{,}5)^{2,1} = 2^{-2,1}$, 2^{-2}, $0{,}5^{\sqrt{2}} = 2^{-\sqrt{2}}$, $16^{\frac{1}{3}} = 2^{1\frac{1}{3}}$, $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-0,5} = 2^{1,5}$.

2.3.22. Aby porównać dwie potęgi, wygodnie jest obliczyć ich iloraz. W tym przypadku doprowadź najpierw do postaci, w której są takie same wykładniki: $2^{655} = 2^{327} \cdot 2^{328}$.

Zatem $\dfrac{2^{327} \cdot 2^{328}}{3^{327}} = 2^{328} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{327}$.

Jest to liczba większa od $2^{328} \cdot (0{,}5)^{327} = 2$, więc liczba większa od jedności. Oznacza to, że liczba 2^{655} jest większa od 3^{327}.

2.3.23. Zauważ, że $2^{126} = 2^5 \cdot 2^{121}$, $2^{123} = 2^2 \cdot 2^{121}$, a $2^{122} = 2 \cdot 2^{121}$.
Wystarczy teraz wyłączyć 2^{121} przed nawias:
$2^{121} \cdot (2^5 - 2^2 - 18) = 2^{121} \cdot (32 - 4 - 18) = 2^{121} \cdot 10$.

2.3.24. Jeżeli na każde pytanie można udzielić jednej z dwóch odpowiedzi, to przy dwóch pytaniach możliwości jest $2^2 = 4$, przy trzech – 2^3 itd. Dwadzieścia pięć pytań to 2^{25} możliwości. Analogicznie, przy czterech odpowiedziach na każde pytanie – przy 15 pytaniach jest $4^{15} = 2^{30}$ możliwych odpowiedzi. Wymnóż te wartości.
Odpowiedź: Było 2^{55} możliwości.

2.3.25.

a) $0{,}00125 \cdot 8 \cdot 10^{11} = 1 \cdot 10^{9}$;

b) $\dfrac{10{,}74 \cdot 10^{-7}}{5{,}37 \cdot 10^{-8}} = 2 \cdot 10^{1}$;

c) $8{,}5 \cdot 10^{5} : 2 \cdot 10^{-13} = 4{,}25 \cdot 10^{-8}$;

d) $\dfrac{14\,400\,000\,000}{0{,}00012} = 1{,}2 \cdot 10^{14}$.

2.3.26. Podziel masę Ziemi przez masę protonu.
Odpowiedź: B.

2.3.27. Odpowiedź: Około 26,3 razy.

2.3.28. Podstaw wartości: $\dfrac{6{,}67 \cdot 1{,}8986 \cdot 8{,}93}{(4{,}21)^2} \cdot \dfrac{10^{-11} \cdot 10^{27} \cdot 10^{22}}{\left(10^{8}\right)^{2}} \left[\dfrac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot \dfrac{\mathrm{kg}^2}{\mathrm{m}^2}\right]$.

Skorzystaj z własności działań na potęgach: $F = 6{,}4 \cdot 10^{22}$ N.
Odpowiedź: Jowisz przyciąga Io z siłą $6{,}4 \cdot 10^{22}$ N.

2.3.29. Wystarczy obliczyć iloraz $\dfrac{w}{c} = \dfrac{1{,}5}{1{,}24} \cdot \dfrac{10^{-6}}{10^{-10}} \approx 1{,}2 \cdot 10^{4} = 12\,000$.

Odpowiedź: Wirus jest 12 000 razy większy od atomu wodoru.

2.3.30. Podstaw dane do wzoru. Nie zapomnij zamienić godziny na minuty.
Odpowiedź: $N = 10^{16}$.

2.3.31. Wybierz wartości z tabeli i wykonaj dzielenie, korzystając z praw działań na potęgach o tej samej podstawie.
Zapisz odpowiedzi A, B, C, D jako potęgi o podstawie 10.
Odpowiedź: D.

2.3.32. Oblicz różnicę między górną a dolną granicą natężenia dźwięku rozmowy.
Odpowiedź: C.

2.3.33. Skorzystaj ze wzoru: $\sqrt[n]{a^m} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$.

a) $\sqrt[5]{5^3} = 5^{\frac{3}{5}}$;

b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3^2}} = 3^{-\frac{1}{2}}$;

c) $\sqrt[7]{16} = 2^{\frac{4}{7}}$;

d) $\sqrt{\sqrt[5]{11^3}} = \left(11^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = 11^{0{,}3}$.

2.3.34.

a) $5^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{5^2}$; b) $9^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$; c) $\left(3^{-2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}$.

2.3.35. Przekształć lewą stronę równości, korzystając ze wzoru $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, gdy $a \geq 0$.

2.3.36. Zastosuj najpierw wzór: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, a potem: $(a - \mathrm{b})(a + b) = a^2 - b^2$.

$$\left[\left(7 - 13^{\frac{1}{2}}\right)\left(7 + 13^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left(49 - 13\right)^{\frac{1}{2}} = 36^{\frac{1}{2}} = 6.$$

Odpowiedź: 6.

2.3.37.

$$16 + 2\left(8 - 28^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(8 + 28^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$16 + 2\left[\left(8 - 28^{\frac{1}{2}}\right)\left(8 + 28^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 16 + 2\left(8^2 - 28\right)^{\frac{1}{2}}$$

Zastosuj najpierw wzór skróconego mnożenia na kwadrat dwumianu: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Teraz możesz najpierw zastosować wzór: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, a potem: $(a - \mathrm{b})(a + b) = a^2 - b^2$.

Odpowiedź: 28.

2.3.38. Zastąp każdą z podstaw potęgą liczby 3 i wykonaj działania na potęgach o tej samej podstawie.
Odpowiedź: $3^{0,7}$.

2.3.39. Skorzystaj ze wzoru $\sqrt[m]{a^p} = a^{\frac{p}{m}}$, a następnie wykonaj działania na potęgach o tej samej podstawie.
Odpowiedź: 7^6.

2.3.40. W liczniku zastąp pierwiastek odpowiednią potęgą o podstawie 11, a następnie wykonaj działania na potęgach o tej samej podstawie. W mianowniku przedstaw każdą z liczb jako potęgę 11 i wykonaj działania na potęgach.
Odpowiedź: $11^2 = 121$.

2.3.41. Zauważ, że tym razem nie podstawy są takie same, a wykładniki. Zastosuj wzór: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$. Otrzymasz: $\frac{36^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{2}}}{8^{\frac{1}{3}}}$. Teraz każdą z postaw potęg występujących w mianowniku i liczniku zastąp potęgą pewnej liczby.
Odpowiedź: 4,5.

2.3.42.

a) $\log_5 625 = 4$, bo $5^4 = 625$;

b) $\log_{0,9} 0{,}81 = 2$, bo $0{,}9^2 = 0{,}81$;

c) $\log 0{,}001 = -3$, bo $10^{-3} = 0{,}001$;

d) $\log_6\left(\frac{1}{216}\right) = -3$, bo $6^{-3} = \frac{1}{216}$;

e) $\log_2(\log_3 81) = \log_2 4 = 2$;

f) $\log_5(\log 10) = \log_5 1 = 0$;

g) $\log_{0,1}(\log_6 6) = \log_{0,1} 1 = 0$;

h) $\log_3\sqrt{3} = 0{,}5$, bo $3^{0,5} = \sqrt{3}$.

2.3.43.

a) $\log_5 x = -3 \Rightarrow x = 5^{-3} = \frac{1}{125}$;

b) $\log_3 x = 0 \Rightarrow x = 3^0 = 1$;

c) $\log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1} = 0{,}1$;

d) $\log_x 0{,}25 = 2 \Rightarrow x^2 = 0{,}25$. Podstawa logarytmu jest dodatnia, więc $x = 0{,}5$.

2.3.44.

a) $\log 24 = a + b$;

b) $\log 64 = 2b$;

c) $\log 8\sqrt{3} = b + 0{,}5a$;

d) $\log \sqrt[3]{3^5} = \frac{5}{3}a$;

e) $\log \frac{64}{3} = 2b - a$;

f) $\log \frac{8}{9} = b - 2a$.

2.3.45.

a) $\log(2x \cdot 5) = 2$ | $10x = 100$, więc $x = 10$

b) $\log(5 \cdot 5x) = 3$ | $25x = 10^3$, więc $x = 40$

c) $\log\left[\left(x+\sqrt{3}\right)\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)\right] = 0$ | $x^2 - 3 = 1$ i $x > \sqrt{3}$, więc $x = 2$

d) $200 - x = 100$ | $x = 100$

2.3.46. Oblicz:

a) $5\log_3 9 + 7\log_2 8 = 5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 31$

b) $6\log_2 64 - \log_7 49 = 6 \cdot 6 - 2 = 34$

c) $\log_6 3 + \log_6 12 = \log_6 36 = 2$

d) $\log_6 108 - \log_6 18 = \log_6 6 = 1$

Zwróć uwagę na to, że w tym przypadku logarytmy nie mają takich samych podstaw. Zastosuj wzory na sumę lub różnicę logarytmów, a potem skorzystaj z definicji logarytmu.

2.3.47.

a) $3\log 6 + 5\log 2 = \log 6912$

b) $4\log 2 - 2\log 8 = \log \frac{1}{4}$

c) $5\log 3 = \log 243$

d) $5\log 7 + 3\log 11 = \log(7^5 \cdot 11^3)$

2.3.48. Skorzystaj z definicji logarytmu: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$.
Odpowiedź: D.

2.3.49. Pamiętaj o kolejności działań. Najpierw skorzystaj ze wzoru na logarytm potęgi; potem, w kolejności występowania, na logarytm ilorazu i iloczynu.
Odpowiedź: B.

2.3.50. Przedstaw każdą z liczb logarytmowanych jako iloczyn, iloraz lub potęgę liczb 3 i 7. Na przykład: $81 = 3^4$. Teraz możesz skorzystać ze własności logarytmów.
Odpowiedź: a) 4,4; b) 6,36; c) 2,44.

2.3.51.

a) $w = 3^{\log_3 17}$, więc $w = 17$.

b) Zauważ, że $2\log_{23}12 = \log_{23}12^2$ i $\frac{E}{T}$.

$$w = 23^{2\log_{23} 12} = 23^{\log_{23} 144} = 144$$

c) Skorzystaj ze wzorów na logarytm potęgi, a następnie na sumę logarytmów.

$$w = 3^{\log_3 5^2 - \log_3 \frac{1}{8}} = 3^{\log_3 200} = 200$$

2.3.52.

a) $S_R(A) = \log A$; $S_R(A_1) = \log A_1 = \log(100 \cdot A) =$ $= \log 100 + \log A = 2 + S_R(A)$	Amplituda wzrośnie sto razy, więc: $A_1 = 100 \cdot A$. Skorzystaj ze wzoru na logarytm iloczynu. Odpowiedź: Siła trzęsienia wzrośnie o 2 jednostki.
b) $S_R(A) + 3 = \log A + \log 10^3 =$ $= \log(A \cdot 1000)$.	Odpowiedź: Amplituda wzrosła 1000 razy.
c) $S_R(A_2) = \log A_2 = \log(500 \cdot A_1) =$ $= \log 5 + \log 100 + \log A_1$	Oznacz: $S_R(A_1) = 5{,}1$; $A_2 = 500\, A_1$. Odpowiedź: Trzęsienie ziemi w Nepalu miało siłę 7,8 w skali Richtera.

2.3.53.

$\dfrac{3^{\log_2 8+\log_2 5}}{3^{\log_2 5}}$	Przedstaw 40 w postaci iloczynu $8 \cdot 5$. Skorzystaj ze wzoru na logarytm iloczynu.
$\dfrac{3^{\log_2 8} \cdot 3^{\log_2 5}}{3^{\log_2 5}}$	Zastosuj wzór $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, a potem skróć ułamek i oblicz logarytm.

2.3.54. Oblicz x, y i z, korzystając z definicji logarytmu.
Odpowiedź: $x = y = z$.

Zestaw zadań do samodzielnego rozwiązania

1. Pole kwadratu o boku $2\sqrt{5}-3$ jest równe:

A. 17; B. $29-12\sqrt{5}$; C. 23; D. $4\sqrt{5}+9$.

2. Wartość podwojonego kwadratu sumy liczb $2\sqrt{7}$ i 3 jest równa:

A. $8\sqrt{7}+18$; B. $37+12\sqrt{7}$; C. $74+24\sqrt{7}$; D. 74.

3. Niech $a=\left(\dfrac{125^{\frac{1}{2}}\cdot 25^{-2}}{\left(\sqrt{5}\right)^{-1}}\right)^{-1}$, $b=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ i $c=5^{\log_5\sqrt{2}}$. Wartość wyrażenia $a+b-c$ jest równa:

A. $2\sqrt{2}+\dfrac{26}{25}$ B. 126; C. $26+2\sqrt{2}$; D. 26.

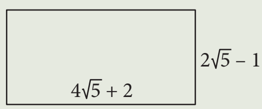
4. Masa cząstki alfa jest równa $6{,}6447\cdot 10^{-27}$ kg. Masa Księżyca – $7{,}3\cdot 10^{22}$ kg. Ile razy masa Księżyca jest większa od masy cząstki alfa?

A. $1{,}1\cdot 10^{-3}$ razy; B. $1{,}1\cdot 10^{51}$ razy; C. $1{,}1\cdot 10^{-6}$ razy; D. $1{,}1\cdot 10^{49}$ razy.

5. Liczba x podzielona przez 7 daje resztę 2. Jeżeli m jest liczbą całkowitą, to można zapisać:

A. $x=2m+7$; B. $x=7m+2$; C. $x:7=2$; D. $x:7=m+2$.

6. Pole prostokąta przedstawionego na rysunku jest równe:



A. 38; B. $8\sqrt{5}-4$;

C. $12\sqrt{5}+2$; D. 28.

7. Liczba o 18% mniejsza od liczby o 12% większej od 2500 to:

A. 2296; B. 1804; C. 2350; D. 1750.

8. Rozwiązaniem nierówności: $-8<3x-2\le 10$ jest przedział:

A. $(-2, 4)$; B. $\langle -2, 4)$; C. $(2, 4\rangle$; D. $(-2, 4\rangle$.

9. Wyrażenie $3\log x - 2\log y + 5\log z$ jest równe:

A. $\log\frac{3x+5z}{2y}$; B. $\log\frac{x^3z^5}{y^2}$; C. $\log(3x-2y+5z)$; D. $\log\frac{x^3}{y^2z^5}$.

10. Liczba $5\cdot 3^{126} - 2\cdot 3^{126}$ przedstawiona w postaci jednej potęgi jest równa:
A. 3; B. 3^{126}; C. 9^{126}; D. 3^{127}.

11. Wykaż, że $0{,}0(6) - 0{,}0(12) = \frac{3}{55}$.

12. Towar z 22% VAT kosztował 420,9 zł. Ile kosztuje po podwyżce VAT do 23%?

13. Skalę Richtera (S_R) służącą do określania siły trzęsienia ziemi można opisać wzorem $S_R(A) = \log A$, gdzie A jest amplitudą fali sejsmicznej.
a) Oblicz, o ile wzrośnie siła trzęsienia ziemi, jeśli amplituda A wzrośnie 10 tysięcy razy.
b) Wartość S_R wzrosła o 2 jednostki. Jaki był wzrost amplitudy A?

14. O liczbach a i b wiadomo, że $a \approx 230{,}8$ i jest to przybliżenie z nadmiarem, a błąd bezwzględny tego przybliżenia wynosi 0,02 oraz że $b \approx 153{,}7$ i jest to przybliżenie z niedomiarem, a błąd bezwzględny tego przybliżenia wynosi 0,13.
a) Znajdź liczby a i b.
b) Oblicz sumę liczb a i b. Otrzymany wynik zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku, a następnie oblicz błąd bezwzględny i względny otrzymanego przybliżenia.

15. W banku A odsetki są kapitalizowane co rok, a w banku B – co kwartał. Lokaty w banku A są oprocentowane w wysokości 3,5 %, a w banku B – 3,4% w skali roku. Oferta którego z banków jest korzystniejsza, jeśli zamierzamy ulokować 5000 zł na trzy lata? Jaka jest różnica?