

KRYTERIA OCENIANIA ODPOWIEDZI
Próbna Matura z OPERONEM

Matematyka
Poziom podstawowy

Marzec 2017

Zadania zamknięte

Za każdą poprawną odpowiedź zdający otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
1.	B	$\frac{\sqrt{20} - 2\sqrt{45}}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{5} - 6\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -4$
2.	A	$3^{-4} \cdot 27^{\frac{4}{3}} = \frac{m+6}{3}$ $3^{-4} \cdot 3^4 \cdot 3 = m+6$ $3 = m+6$ $m = -3$
3.	D	<p>Oprocentowanie miesięczne: $\frac{6\%}{12} = \frac{1}{2}\% = 0,5\% = 0,005$.</p> <p>Stan konta po dwóch miesiącach: $(1 + 0,005)^2 \cdot a = (1,005)^2 \cdot a$ (zł)</p>
4.	A	$2 + \log_3 4 = \log_3 9 + \log_3 4 = \log_3 36 = 2\log_3 6$
5.	C	$y = -x + 6$ – równanie prostej r $y = 2x + 3$ – równanie prostej p
6.	D	$\frac{x-1}{2} < \frac{x}{3} / \cdot 6$ $3x - 3 < 2x$ $x < 3$ $x \in \langle -2, 3 \rangle$ $2(x-2) \leq 4x / : 2$ $x - 2 \leq 2x$ $x \geq -2$
7.	B	$W = [(x-1)(x+1)]^2 - 1 = (x^2 - 1)^2 - 1$ $W = (x^4 - 2x^2 + 1) - 1 = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$
8.	A	$b = 0$ – wykres jest symetryczny względem osi OY $f(x) = -x^2 + bx + c$ $f(x) = -x^2 + c$ $f(c) = -c^2 + c = 0 \Rightarrow c = 0$ lub $c = 1$, stąd $c = 1$ (bo zgodnie z założeniem $c \neq 0$)
9.	A	$\Delta = (a+1)^2 + 12 > 0$ – równanie ma dwa pierwiastki

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
10.	B	$-8 = \frac{a}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a = -4$ $f(x) = \frac{-4}{x}$ $f(2)z + f(-1) = 0$ $\frac{-4}{2} \cdot z + \frac{-4}{-1} = 0$ $z = 2$
11.	C	$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ stąd } \alpha = 60^\circ (\alpha - \text{kąt ostry})$ $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ - \text{miara kąta, jaki tworzy przekątna z krótszym bokiem}$
12.	D	$a, 2a - \text{długości przyprostokątnych}$ $a^2 + (2a)^2 = (\sqrt{5})^2$ $a = 1 \vee a = -1, a > 0$ $a = 1$ $1 + 2 = 3$
13.	D	$M = \frac{\sin^2 77^\circ + \sin^2 13^\circ}{\operatorname{tg} 120^\circ \cdot \cos 150^\circ}$ $M = \frac{\sin^2 77^\circ + \cos^2 77^\circ}{-\sqrt{3} \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{2}{3}$
14.	A	$a_1 + 3r = 4(a_1 + r)$ $-3a_1 = r$ $a_1 + 4r = 11$ $a_1 + 4(-3a_1) = 11$ $a_1 = -1$
15.	B	$b_1 + \frac{1}{2} \cdot b_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot b_1 = -\frac{7}{2}$ $b_1 = -2$ $b_2 = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$ $b_2 - b_1 = -1 + 2 = 1$
16.	C	$x - \text{długość drugiego boku równoległoboku}$ $\sqrt{3} \cdot x \cdot \sin 60^\circ = 6$ $\sqrt{3} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$ $x = 4$ $L = 2(4 + \sqrt{3}) \approx 11,5 \text{ (cm)}$
17.	B	<p>Kąty trójkąta <i>CED</i>: $20^\circ, 20^\circ, 140^\circ$ Kąty trójkąta <i>AED</i>: $40^\circ, 40^\circ, 100^\circ$ $\sphericalangle AEC = 2 \cdot \sphericalangle ADC = 120^\circ$</p>

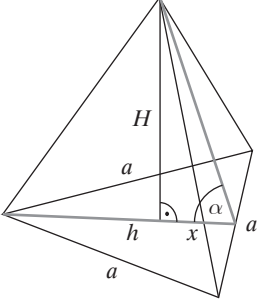
Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
18.	A	P_1 – pole kwadratu K_1 $\frac{5}{P_1} = \frac{1}{16}$ $P_1 = 80$ a – długość boku kwadratu K_1 $a^2 = 80$ $a = \sqrt{80}$ $L = 4\sqrt{80} = 16\sqrt{5}$
19.	D	$r = \sqrt{(-1+4)^2 + (1+3)^2} = 5$ $L = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$
20.	B	$S = (-1, -3)$ – środek odcinka AB Prosta SC : $y = -2x - 5$ $a + b = -2 - 5 = -7$
21.	A	$3m^2 = -\frac{1}{9m}$ $m^3 = -\frac{1}{27}$ $m = -\frac{1}{3}$
22.	C	$ EF = \frac{1}{2} DB = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = a$
23.	C	Parę 3,4 można ustawić w liczbie na cztery sposoby. Są dwie możliwości wyboru miejsc dla 3 i 4: 34, 43. $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ – na tyle sposobów można ustawić pozostałe cyfry. Wszystkich możliwości jest: $4 \cdot 2 \cdot 6 = 48$
24.	C	b – liczba kul białych $b + 2b = 3b$ – liczba kul w urnie $\frac{b}{3b} \cdot \frac{2b}{3b-1} = \frac{1}{4}$ $b = 3$ $cz = 6$ – liczba kul czarnych
25.	B	Dane ustawione w ciąg rosnący: 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4 Mediana: $m = \frac{2+3}{2} = 2,5$ Średnia: $s = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1}{10} = 2,4$ $m > s$

Zadania otwarte

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
26.	I etap rozwiązania Przekształcenie nierówności, obliczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego i miejsc zerowych: $\frac{x^2 - x}{2} > 1$ $x^2 - x - 2 > 0$ $\Delta = 1 + 4 \cdot 2 = 9$ $x_1 = -1, x_2 = 2$	1
	II etap rozwiązania Określenie zbioru rozwiązań nierówności: $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$	2
27.	I etap rozwiązania Wyznaczenie x : $\log_3(\log_2 x) = 0$ $3^0 = \log_2 x$ $2^1 = x$ $2 = x$	1
	II etap rozwiązania Wykazanie prawdziwości równości: $\log x - \log \frac{1}{x+3} = 1$ $\log x - \log \frac{1}{x+3} = \log \frac{x}{1} = \log \frac{2}{1} = \log 10 = 1$	2
28.	I etap rozwiązania Zapisanie równości wynikającej z podobieństwa trójkątów ABD i CEB , gdzie E – punkt przecięcia wysokości poprowadzonej z wierzchołka C z podstawą AB : x – długość podstawy AB trójkąta $\frac{x}{2} = \frac{a}{4a}$	1
	II etap rozwiązania Wyznaczenie długości podstawy: $x^2 = 8a^2$ $x = 2\sqrt{2} \cdot a$	2

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
29.	I etap rozwiązania Wykorzystanie związku między tangensem, sinusem i cosinusem tego samego kąta ostrego: $\operatorname{tg} \alpha = 2$ $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$ $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$	1
	II etap rozwiązania Przekształcenie rozważanego wyrażenia: $W = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{\cos \alpha + \sin \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{(2 \cos \alpha - \cos \alpha)^2}{\cos \alpha + 2 \cos \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$ $W = \frac{\cos^2 \alpha}{3 \cos^2 \alpha} = \frac{1}{3}$	2
30.	I etap rozwiązania Sprawdzenie, że pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji, należy do przedziału $\langle -2, 2 \rangle$: $x_0 = \frac{-2}{-2} = 1 \in \langle -2, 2 \rangle$ Obliczenie wartości funkcji w punkcie 1 oraz na krańcach przedziału $\langle -2, 2 \rangle$: $f(1) = 4$ $f(2) = 3$ $f(-2) = -5$	1
	II etap rozwiązania Określenie najmniejszej oraz największej wartości funkcji w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$ i zbioru wartości: $f(-2) < f(2) < f(1)$ $Z = \langle -5, 4 \rangle$	2
31.	I etap rozwiązania Znalezienie współrzędnych punktu B: $\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x + 3y - 13 = 0 \end{cases}$ $B = (1, 4)$ Znalezienie współrzędnych punktu A: $A = (0, 1)$	1
	II etap rozwiązania Obliczenie długości boku a: $a = AB = \sqrt{(1-0)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$	2

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
32.	Niewielki postęp: Znalezienie wzoru na wyraz ogólny ciągu arytmetycznego: $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 6$	1
	Istotny postęp: Określenie początkowych wyrazów ciągu geometrycznego: $b_1 = 2, b_2 = 4, b_3 = 8$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności zadania: Zapisanie wzoru na wyraz ogólny ciągu geometrycznego: $b_n = 2^n$	3
	Rozwiązanie pełne: Określenie wyrazu ciągu równego 1024: $2^n = 1024, n = 10$ $b_{10} = 1024$	4
33.	Niewielki postęp: Określenie liczby zdarzeń elementarnych: $ \Omega = 100$	1
	Istotny postęp: Określenie liczby losów oznaczonych liczbami nieparzystymi: 50 Określenie liczby losów oznaczonych liczbami podzielными przez 7: 14 ($100 = 7 \cdot 14 + 2$) Określenie liczby losów oznaczonych liczbami nieparzystymi podzielnymi przez 7: 7	2
	Pokonanie zasadniczych trudności zadania: Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : wyciągnięty los oznaczony jest liczbą nieparzystą: $P(A) = \frac{50}{100}$ Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia B : wyciągnięty los oznaczony jest liczbą podzielną przez 7: $P(B) = \frac{14}{100}$ Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia $A \cap B$: wyciągnięty los oznaczony jest liczbą nieparzystą, która jest podzielna przez 7: $P(A \cap B) = \frac{7}{100}$	3
	Rozwiązanie pełne: Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia $A \cup B$: wyciągnięty los oznaczony jest liczbą nieparzystą lub liczbą podzielną przez 7, czyli wyciągnięty los jest wygrywający: $P(A \cup B) = \frac{50}{100} + \frac{14}{100} - \frac{7}{100} = \frac{57}{100}$	4

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
34.	<p>Niewielki postęp: Sporządzenie rysunku i zaznaczenie odpowiedniego kąta:</p>  <p>Zauważenie, że trójkąt utworzony przez wysokość ostrosłupa H, wysokość ściany bocznej i $\frac{1}{3}$ wysokości podstawy h jest prostokątny oraz zapisanie równości wynikającej z tego, że $\text{tg } \alpha = \frac{3}{2}$:</p> $\frac{H}{x} = \text{tg } \alpha$ $\frac{H}{x} = \frac{3}{2}$ $x = \frac{2H}{3}$	1
	<p>Istotny postęp: Wyznaczenie wysokości podstawy: $h = 8\sqrt{3}$</p>	2
	<p>Pokonanie zasadniczych trudności zadania: Wyznaczenie długości boku podstawy: $a = 16$</p>	3
	<p>Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, np. błędami rachunkowymi: np. popełnienie błędów rachunkowych w obliczeniu pola podstawy ostrosłupa</p>	4
	<p>Rozwiązanie pełne: Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 16^2 \cdot 4\sqrt{3} = 256$</p>	5