KRYTERIA OCENIANIA ODPOWIEDZI
Próbna Matura z OPERONEM

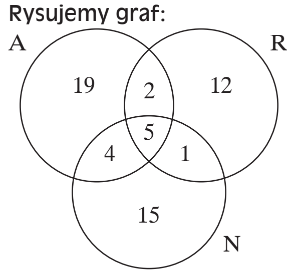
Matematyka
Poziom podstawowy

Marzec 2018

Zadania zamknięte

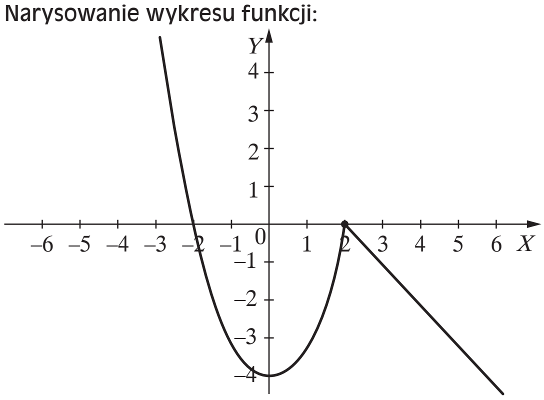
Za każdą poprawną odpowiedź zdający otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
1.	C	$7^{30}\cdot\left(35^3\right)^4=7^{30}\cdot(5\cdot7)^{12}=7^{30}\cdot5^{12}\cdot7^{12}=7^{42}\cdot5^{12}=49^{21}\cdot5^{12}$
2.	A	$a=\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)}{2-1}=2\sqrt{2}\Rightarrow a^3=8\cdot\sqrt{8}=16\sqrt{2}$
3.	B	$x+\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)<\left(x+\sqrt{3}\right)^2\Rightarrow x+x^2-3<x^2+2\sqrt{3}x+3\Rightarrow$ $x-2\sqrt{3}x<6\Rightarrow x\left(1-2\sqrt{3}\right)<6\Rightarrow x>\frac{6}{1-2\sqrt{3}}\Rightarrow x>\frac{6\left(1+2\sqrt{3}\right)}{1-12}\Rightarrow$ $x\in\left(\frac{-6\left(1+2\sqrt{3}\right)}{11},+\infty\right)$
4.	C	Prosta AB ma wzór: $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$, zatem współczynnik kierunkowy prostej równoległej jest równy $a=\frac{1}{2}$, więc wzór prostej równoległej ma postać $y=\frac{1}{2}x+b$. Do prostej k należy punk C, zatem wzór prostej k: $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$
5.	A	$x_1=-11, x_2=1\Rightarrow x_w=\frac{-11+1}{2}\Rightarrow x_w=-5$ Ramiona paraboli są skierowane w dół, więc funkcja jest rosnąca w przedziale: $\left(-\infty,-5\right\rangle$
6.	C	$\frac{-\frac{1}{2}-a}{-\frac{1}{2}-5}=2\Rightarrow-\frac{1}{2}-a=2\left(-\frac{1}{2}-5\right)\Rightarrow-\frac{1}{2}-a=-1-10\Rightarrow$ $-a=-10\frac{1}{2}\Rightarrow a=10\frac{1}{2}\Rightarrow 2a=21$
7.	A	$a_1=4-15\Rightarrow a_1=-11$ $a_{41}=164-15\Rightarrow a_{41}=149$ $S_{41}=\frac{-11+149}{2}\cdot41\Rightarrow S_{41}=2829$
8.	C	$a_1+a_2+a_3=114\Rightarrow a_1+7a_1+49a_1=114\Rightarrow57a_1=114\Rightarrow a_1=2$ Liczbą odwrotną do liczby 2 jest liczba $\frac{1}{2}$.
9.	A	$\lvert CAB\rvert=62^\circ\Rightarrow\lvert COB\rvert=124^\circ\Rightarrow$ $\lvert\angle OBC\rvert=\frac{1}{2}(180^\circ-124^\circ)=28^\circ$ $\alpha=90^\circ-28^\circ\Rightarrow\alpha=62^\circ$

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
10.	D	Obliczamy przeciwprostokątną trójkąta *ABC*: $\lvert AB\rvert=\sqrt{\frac{9}{4}+4}\Rightarrow\lvert AB\rvert=\frac{5}{2}$ Obliczamy skalę podobieństwa: $k=\frac{25}{\frac{5}{2}}=10$ Obliczamy wysokość trójkąta *ABC* poprowadzoną na przeciwprostokątną, np. z pola: $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}h\Rightarrow h=\frac{6}{5}$. Stąd wysokość trójkąta *DEF* poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość $h_1=kh=\frac{6}{5}\cdot 10\Rightarrow h_1=12$
11.	C	Wzór funkcji, której wykres jest równoległy do osi OX ma postać: $y=b$ (funkcja stała), zatem otrzymujemy warunki: $\begin{cases}4m-4=0\\3k+6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=1\\k=-2\end{cases}$
12.	C	Wzór funkcji, której wykres powstaje z wykresu funkcji $y=f(x)$ w symetrii osiowej względem osi OY, to $y=f(-x)$, zatem $y=f(-x)=2^{-x}-4\Rightarrow y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-4$
13.	B	$W=\frac{x^4-(x+6)^2}{x^2-5x+6}=\frac{(x^2-x-6)(x^2+x+6)}{(x-2)(x-3)}=$ $\frac{(x-3)(x+2)(x^2+x+6)}{(x-2)(x-3)}\Rightarrow$ $W=\frac{(x+2)(x^2+x+6)}{x-2}$
14.	C	Jeśli *ABCD* jest trapezem, to oznaczamy: $\lvert AB\rvert=3a,\ \lvert CD\rvert=2a,\ \lvert BC\rvert=\lvert AD\rvert=a$ Niech DE będzie wysokością trapezu. Wówczas $\lvert AE\rvert=\frac{1}{2}a$, stąd: $\cos\angle DAB=\frac{\frac{1}{2}a}{a}\Rightarrow\cos\angle DAB=\frac{1}{2}\Rightarrow\lvert\angle DAB\rvert=60^\circ$
15.	C	l, h, r – odpowiednio tworząca, wysokość i promień podstawy stożka Wówczas: $\frac{r}{l}=\cos 30^\circ$ i $\pi rl=8\pi\sqrt{3}$ $r=\frac{\sqrt{3}}{2}l$ i $\pi rl=8\pi\sqrt{3}\Rightarrow\pi\frac{\sqrt{3}}{2}l^2=8\pi\sqrt{3}\Rightarrow l^2=16\Rightarrow l=4\wedge r=2\sqrt{3}$ i $h=\sqrt{16-12}\Rightarrow h=2$
16.	B	$B=(x,y)\Rightarrow\left(\frac{5+x}{2},\frac{-6+y}{2}\right)=(-3,-1)\Rightarrow\frac{5+x}{2}=-3\wedge\frac{y-6}{2}=-1$ $\Rightarrow x=-11\wedge y=4\Rightarrow B=(-11,4)$
17.	C	Jeśli a – bok trójkąta, to: $\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{6}+2\Rightarrow\frac{a\sqrt{3}}{6}=2\Rightarrow a=4\sqrt{3}\Rightarrow P=\frac{48\sqrt{3}}{4}\Rightarrow P=12\sqrt{3}$
18.	D	Rysujemy graf:  $19+12+15=46$
19.	B	$a_n<0\Rightarrow(4n+8)(2n-11)<0\Rightarrow n\in\left(-2,\frac{11}{2}\right)\wedge n\in N^+\Rightarrow$ $n\in\{1,2,3,4,5\}$

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
20.	B	$a_1 = S_1 = 3,$ $a_1 + a_2 = S_2 = 9$ $3 + a_a = 9 \Rightarrow a_2 = 6$
21.	A	Jeśli a – krawędź sześcianu, to: $a\sqrt{3} = 18 \Rightarrow a = 6\sqrt{3}$ $P = 6 \cdot \left(6\sqrt{3}\right)^2 = 648$
22.	C	$\lvert AB \rvert = \sqrt{(3-3)^2 + (-9+4)^2} = 5$ $r + R = 5$ $\lvert AB \rvert = r + R$ Zatem okręgi są styczne zewnętrznie.
23.	C	$3\operatorname{tg}\alpha + \frac{3}{\operatorname{tg}\alpha} = 4 \Rightarrow \frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{3\cos\alpha}{\sin\alpha} = 4 \Rightarrow \frac{3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = 4 \Rightarrow$ $\frac{3}{\sin\alpha\cos\alpha} = 4 \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{3}{4}$

Zadania otwarte

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
24.	Postęp: Przekształcenie nierówności do postaci $-18x^2 + 18 < 0$ i wyznaczenie pierwiastków: $x_1 = -1,\ x_2 = 1$	1
	Rozwiązanie bezbłędne: Rozwiązanie nierówności: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	2
25.	Postęp: Narysowanie wykresu funkcji:  	1
	Rozwiązanie bezbłędne: Podanie maksymalnego przedziału, w którym funkcja jest rosnąca: $\langle 0, 2 \rangle$	2
26.	Postęp: Przekształcenie wzoru na ogólny wyraz ciągu do postaci: $a_n = 2 + n\log_5 2$	1
	Rozwiązanie bezbłędne: Wykazanie, że ciąg jest arytmetyczny: $a_{n+1} - a_n = 2 + (n+1)\log_5 2 - 2 - n\log_5 2 = \log_5 2,$ więc ciąg jest arytmetyczny o różnicy $r = \log_5 2$	2

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
27.	Postęp: Podanie współczynnika b : $b=4$	1
	Rozwiązanie bezbłędne: Zapisanie i rozwiązanie równania: $\frac{1}{2}=\frac{a}{2+4}\Rightarrow a=3$	2
28.	Postęp: Zapisanie nierówności w postaci: $(2a-1)^2+a^2+(b-3)^3+1>0$	1
	Rozwiązanie bezbłędne: Uzasadnienie tezy zadania: kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc suma kwadratów powiększona o 1 jest liczbą dodatnią.	2
29.	Postęp: Wyznaczenie liczebności zbioru Ω: $\lvert\Omega\rvert=(5+n)(4+n)$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie liczebności zdarzenia A: $\lvert A\rvert=5\cdot 4+n(n-1)$	2
	Rozwiązanie prawie pełne: Zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A)=\frac{n(n-1)+5\cdot 4}{(5+n)(4+n)}=\frac{13}{28}$	3
	Rozwiązanie bezbłędne: Rozwiązanie równania: $n=3$	4
30.	Postęp: Zapisanie oznaczeń: $ABCD$ – wierzchołki trapezu CD – krótsza podstawa trapezu, $\lvert CD\rvert=x$ CE, DF – wysokości trapezu $\lvert\angle DAB\rvert=45^\circ$, $\lvert\angle ABC\rvert=60^\circ$ Wyznaczenie długości ramion: $\lvert AD\rvert=6\sqrt{2}$, $\lvert BC\rvert=4\sqrt{3}$ (lub długości odcinków: $\lvert AF\rvert=6$, $\lvert BE\rvert=2\sqrt{3}$)	1
	Istotny postęp: Wyznaczenie długości ramion: $\lvert AD\rvert=6\sqrt{2}$, $\lvert BC\rvert=4\sqrt{3}$ i długości odcinków: $\lvert AF\rvert=6$, $\lvert BE\rvert=2\sqrt{3}$	3 (2 pkt, gdy popełniono jeden błąd)
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie równania: $6\sqrt{2}+6+x+4\sqrt{3}+2\sqrt{3}+x=6\sqrt{3}+6\sqrt{2}+12$	4
	Rozwiązanie prawie pełne: Rozwiązanie równania: $x=3$	5
	Rozwiązanie pełne: Obliczenie pola trapezu: $P=36+6\sqrt{3}$	6
31.	Istotny postęp: Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej prostopadłej: $a=-2$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Wyznaczenie równania prostej prostopadłej: $k: y=-2x+9$	2
	Rozwiązanie prawie pełne: Obliczenie pola trójkąta: $P=\frac{125}{4}$	3

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
32.	Postęp: Wprowadzenie dokładnych oznaczeń lub wykonanie rysunku z oznaczeniami: ABC – podstawa ostrosłupa S – wierzchołek ostrosłupa S' – spodek wysokości a, h – odpowiednio krawędź podstawy i wysokość ostrosłupa oraz wyznaczenie odległości wierzchołka podstawy od spodka wysokości ostrosłupa: $\lvert AS'\rvert = \frac{a\sqrt{3}}{3}$	1
	Istotny postęp: wyznaczenie zależności między a, h $\frac{h}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \mathrm{tg}60^\circ \Rightarrow h = a$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie równania: $\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{2}{3}\sqrt{3}$	3
	Rozwiązanie bezbłędne: Rozwiązanie równania: $a = 2$	4