KRYTERIA OCENIANIA ODPOWIEDZI
Próbna Matura z OPERONEM

Matematyka
Poziom rozszerzony

Marzec 2018

Zadania zamknięte

Za każdą poprawną odpowiedź zdający otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
1.	B	Wyznaczamy zbiór rozwiązań nierówności: $\left\|\lvert x-3\rvert+1\right\|<5 \Leftrightarrow \lvert x-3\rvert+1<5 \wedge \lvert x-3\rvert+1>-5$, $\Delta>0 \wedge f(1)\neq 0 \wedge f(-3)\neq 0$, czyli $x-3<4 \wedge x-3>-4$, druga nierówność jest zawsze prawdziwa, zatem rozwiązujemy pierwszą nierówność: $x<7 \wedge x>-1 \Leftrightarrow x\in(-1,7)$, stąd najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą daną nierówność jest 0.
2.	B	Każda osoba ma wybór jednego z trzech wagonów, więc wszystkich możliwości jest $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=3^6$
3.	A	$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]=\frac{5}{2}\left(\frac{25}{4}-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ $\frac{5}{2}\left(\frac{25}{4}+\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{31}{4}=\frac{155}{8}$
4.	B	r,x – odpowiednio promień przekroju i odległość płaszczyzny przekroju od środka kuli $\pi r^2=576\pi \Rightarrow r=24$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa: $x^2+576=676 \Rightarrow x=10$
5.	D	$f(x)=\sin x+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow f(x)=2\sin\frac{x+x+\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x-x-\frac{\pi}{3}}{3}\Rightarrow$ $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}\Rightarrow f(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ $-1\leq\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leq1\Rightarrow-\sqrt{3}\leq\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leq\sqrt{3}\Rightarrow-\sqrt{3}\leq f(x)\leq\sqrt{3}$

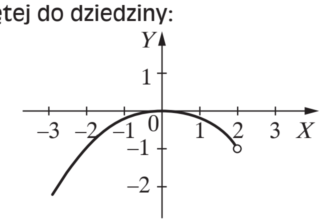
Zadania otwarte – kodowane

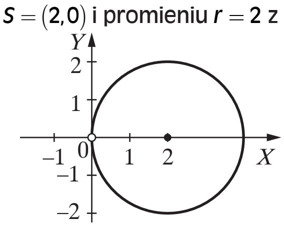
Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania	Liczba punktów
6.	9 3 6	$\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos2\alpha=\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2=-\frac{7}{25}$, $\sin2\alpha=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{-3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$ $\cos3\alpha=\cos\alpha\cos2\alpha-\sin\alpha\sin2\alpha\Rightarrow\cos3\alpha=\left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{-7}{25}\right)-\frac{4}{5}\cdot\frac{-24}{25}\Rightarrow$ $\cos3\alpha=\frac{117}{125}=0,936$	0–2
7.	1 3 6	$a_1=5, a_2=\frac{15}{4}, a_3=\frac{45}{16}, a_4=\frac{135}{64}\Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{875}{64}\approx13,67$	0–2

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania	Liczba punktów
8.	4 4 7	$(x-6)^2+y^2=\sqrt{5}\Rightarrow S=(6,0), r=\sqrt{5}$. Wyznaczamy równania stycznych: $k: y=2x+b\Rightarrow 2x-y+b=0$ $d(S,l)=\frac{\lvert 12+b\rvert}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Rightarrow \lvert 12+b\rvert=5\Rightarrow 12+b=5\vee 12+b=-5\Rightarrow$ $b=-7\vee b=-17\Rightarrow d(l_1,l_2)=\frac{\lvert -7+17\rvert}{\sqrt{5}}\Rightarrow d(l_1,l_2)=2\sqrt{5}\approx 4{,}47213\ldots$	0–2

Zadania otwarte

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
9.	Rozwiązanie: Wyznaczamy pochodną funkcji: $f'(x)=\frac{2(x+2)-2x-5}{(x+2)^2}=-\frac{1}{(x+2)^2}, x\in R\setminus\{-2\}$ Prosta l ma współczynnik kierunkowy równy $a_l=9$, zatem prosta prostopadła do niej ma współczynnik kierunkowy $a_k=-\frac{1}{9}$. Mamy więc z interpretacji geometrycznej równanie: $-\frac{1}{(x+2)^2}=-\frac{1}{9}\Rightarrow (x+2)^2=9\Rightarrow x=1\vee x=-5$, zatem są dwa punkty, w których można poprowadzić styczną: $A=\left(1,\frac{7}{3}\right), B=\left(-5,\frac{5}{3}\right)$	0–3
	Istotny postęp: Wyznaczenie pochodnej funkcji $f'(x)=-\frac{1}{(x+2)^2}, x\in R\setminus\{-2\}$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie równania $-\frac{1}{(x+2)^2}=-\frac{1}{9}$	2
	Rozwiązanie pełne: Rozwiązanie równania: $x=1\vee x=-5$ i zapisanie odpowiedzi: $A=\left(1,\frac{7}{3}\right), B=\left(-5,\frac{5}{3}\right)$	3
10.	Rozwiązanie: Zauważamy, że wzór funkcji jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego, w którym $q=\frac{x}{x-4}$, aby suma istniała, ciąg musi być zbieżny, więc $-1<\frac{x}{x-4}<1\wedge x\neq 4$ Rozwiązujemy pierwszą nierówność: $-1<\frac{x}{x-4}\Rightarrow \frac{x}{x-4}+1>0\Rightarrow \frac{2x-4}{x-4}>0\Rightarrow x\in(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$ Rozwiązujemy drugą nierówność dla $\frac{x}{x-4}<1\Rightarrow \frac{4}{x-4}<0\Rightarrow x<4$ Wyznaczamy część wspólną: $x\in(-\infty,2)$ Wyznaczamy sumę szeregu: $S=\frac{\frac{x^2}{x-4}}{1-\frac{x}{x-4}}\Rightarrow S=-\frac{x^2}{4}\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{4}x^2\wedge x\in(-\infty,2)$ Rysujemy wykres funkcji kwadratowej i zaznaczamy część zgodną z dziedziną	0–4
	Istotny postęp: Wyznaczenie dziedziny funkcji: $x\in(-\infty,2)$	2 (1 pkt, popełniono drobny błąd rachunkowy)
	Pokonanie zasadniczych trudności: Wyznaczenie wzoru funkcji: $f(x)=-\frac{1}{4}x^2\wedge x\in(-\infty,2)$	3

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
	Rozwiązanie pełne: Narysowanie paraboli obciętej do dziedziny:  	4
11.	Rozwiązanie: $\sin^4 x + \cos^4 m \Rightarrow \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = m \Rightarrow -2\sin^2 x\cos^2 x = m-1$ $4\sin^2 x\cos^2 x = 2-2m$ $\sin^2 2x = 2-2m$, zatem: To równanie ma rozwiązanie tylko wtedy, gdy: $2-2m \ge 0 \wedge 2-2m \le 1$ $m \le 1 \wedge m \ge \frac{1}{2}$ $m \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle$	0–2
	Istotny postęp: Zapisanie równania w postaci: $\sin^2 2x = 2-2m$	1
	Rozwiązanie pełne: Wykazanie tezy zadania: Zapisanie nierówności: $2-2m \ge 0 \wedge 2-2m \le 1$ i rozwiązanie układu: $m \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle$	2
12.	Rozwiązanie: Zapisujemy nierówność w postaci: $\log_3 2 + \log_3 5 + \log_3 8 < 4$ Przekształcamy nierówność: $\log_3 2\cdot 5\cdot 8 < 4 \Rightarrow \log_3 80 < 4$ $\Rightarrow \log_3 80 < \log_3 81$ – nierówność prawdziwa, gdyż funkcja $f(x) = \log_3 x$ jest funkcją rosnącą i $80 < 81$, więc $f(80) < f(81)$, zatem $\log_3 80 < \log_3 81$	0–3
	Postęp: Zapisanie nierówności w postaci: $\log_3 2 + \log_3 5 + \log_3 8 < 4$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie nierówności w postaci: $\log_3 2\cdot 5\cdot 8 < 4 \Rightarrow \log_3 80 < 4$	2
	Rozwiązanie pełne: $\Rightarrow \log_3 80 < \log_3 81$ – nierówność prawdziwa, gdyż funkcja $f(x) = \log_3 x$ jest funkcją rosnącą i $80 < 81$, więc $f(80) < f(81)$, zatem $\log_3 80 < \log_3 81$	3
13.	Rozwiązanie: Oznaczamy boki trójkąta prostokątnego ABC: $\lvert BC\rvert = a, \lvert AC\rvert = b, \lvert AB\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$, zatem bok trójkąta równobocznego DEF ma długość $\sqrt{a^2+b^2}$ Zapisujemy równanie wynikające z treści zadania: $P_{\Delta DEF} = 2P_{\Delta ABC}$, więc: $\frac{\sqrt{a^2+b^2}^2\sqrt{3}}{4} = ab$ Przekształcamy równanie: $a^2+b^2-\frac{\sqrt{3}}{4}ab = 0 : \vert ab \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{4}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow \text{tg}\alpha + \frac{1}{\text{tg}\alpha} - \frac{4}{\sqrt{3}} = 0$, gdzie α to kąt leżący naprzeciw boku BC. Przekształcamy dalej równanie podstawiając za $\text{tg} = t$ i otrzymujemy równanie: $t^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}t + 1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge t_2 = \sqrt{3}$, zatem $\text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \vee \text{tg}\alpha = \sqrt{3}$, co oznacza, że $\alpha = 30^\circ \vee \alpha = 60^\circ$, co kończy dowód.	0–4

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
	Postęp: Wprowadzenie oznaczeń: $ABC: \lvert BC\rvert = a, \lvert AC\rvert = b, \lvert AB\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$ bok trójkąta równobocznego DEF ma długość $\sqrt{a^2+b^2}$ i zapisanie równania: $\frac{\sqrt{a^2+b^2}^2\sqrt{3}}{4} = ab$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Przekształcenie równania do postaci: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{4}{\sqrt{3}} = 0$	2
	Rozwiązanie prawie pełne: Podstawienie za $\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\alpha = t$ i zapisanie równania: $t^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}t + 1 = 0$	3
	Rozwiązanie pełne: Rozwiązanie równania i zapisanie odpowiedzi: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \vee \mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$, co oznacza, że $\alpha = 30° \vee \alpha = 60°$, co kończy dowód.	4
14.	Rozwiązanie: Wyznaczamy środek i promień okręgu: $S = (4,0), r = 4$. Niech $P = (x,y) \wedge x \neq 0$ będzie środkiem dowolnej cięciwy OA, gdzie O jest środkiem układu współrzędnych. Wówczas $\lvert OP\rvert^2 + \lvert PS\rvert^2 = \lvert OS\rvert^2$, zatem: $x^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 = 16$ Zapisujemy równanie w postaci: $x^2 + y^2 - 4x = 0$ Zatem otrzymujemy okrąg o środku $S = (2,0), r = 2$, z którego należy wyłączyć punkt $O = (0,0)$, gdyż nie jest on środkiem żadnej cięciwy.	0–4
	Istotny postęp: Wyznaczenie środka i promienia okręgu: $S = (4,0), r = 4$	1
	Istotny postęp: Wprowadzenie oznaczenia $P = (x,y) \wedge x \neq 0$ – środek dowolnej cięciwy i zapisanie równania: $\lvert OP\rvert^2 + \lvert PS\rvert^2 = \lvert OS\rvert^2$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie równania w postaci: $x^2 + y^2 - 4x = 0$	3
	Rozwiązanie pełne: Narysowanie okręgu o środku $S = (2,0)$ i promieniu $r = 2$ z wyłączonym punktem $O = (0,0)$:  	4
15.	Rozwiązanie: Wprowadzamy oznaczenia: $ABCS$ – dany ostrosłup o wierzchołku S i spodku wysokości S' b, H – odpowiednio krawędź boczna i wysokość ostrosłupa $ABCS$ h, x – odpowiednio wysokość i krawędź boczna BD – ostrosłupa $ABCD$, $h = \lvert DD'\rvert$ SE – wysokość ściany bocznej $\lvert SE\rvert = \sqrt{b^2 - 2^2}$ Zapisujemy równanie wynikające z treści zadania: $\frac{1}{3}P_{\Delta ABC}H = 4 \cdot \frac{1}{3}P_{\Delta ABC}h$, stąd: $h = \frac{1}{4}H \Rightarrow \lvert AD\rvert = \frac{1}{4}b$, ponieważ trójkąty ASS' i ADD' są podobne. Zapisujemy układ równań wynikających z twierdzenia Pitagorasa i pola ściany ABS: $\begin{cases} \frac{1}{16}b^2 + x^2 = 16 \\ \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{b^2 - 4} = \frac{1}{2}xb \end{cases}$ Z drugiego równania otrzymujemy: $x = \frac{4\sqrt{b^2-4}}{b}$ i podstawiamy do pierwszego: $\frac{1}{16}b^2 + \frac{16(b^2-4)}{b^2} = 16 \Rightarrow b = 4\sqrt{2}$	0–4

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
	Istotny postęp: Wprowadzenie oznaczeń: $ABCS$ – dany ostrosłup o wierzchołku S i spodku wysokości S' b, H – odpowiednio krawędź podstawy, krawędź boczna i wysokość ostrosłupa $ABCS$ h, x – odpowiednio wysokość i krawędź boczna BD – ostrosłupa $ABCD$, $h = \|DD'\|$ SE – wysokość ściany bocznej BCS $\|SE\| = \sqrt{b^2 - 2^2}$	1
	Istotny postęp: Zapisanie zależności: $h = \frac{1}{4}H \Rightarrow \|AD\| = \frac{1}{4}b$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie układu równań: $\begin{cases} \frac{1}{16}b^2 + x^2 = 16 \\ \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{b^2-4} = \frac{1}{2}xb \end{cases}$	3
	Rozwiązanie pełne: Obliczenie krawędzi bocznej ostrosłupa: $ABCS$: $b = 4\sqrt{2}$	4
16.	Rozwiązanie: A – wylosowanie dokładnie jednego małżeństwa $\|\Omega\| = \binom{10}{3}\binom{10}{3}$, $\|A\| = \binom{10}{3}\binom{3}{1}\binom{7}{2}$ $P(A) = \dfrac{\binom{10}{3}\binom{3}{1}\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}\binom{10}{3}} = \dfrac{21}{40}$	0–4
	Istotny postęp: Wyznaczenie liczebności zbioru zdarzeń elementarnych: $\|\Omega\| = \binom{10}{3}\binom{10}{3}$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Obliczenie liczebności zdarzenia A: $\|A\| = \binom{10}{3}\binom{3}{1}\binom{7}{2}$	2
	Rozwiązanie prawie pełne: Zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia A w postaci: $P(A) = \dfrac{\binom{10}{3}\binom{3}{1}\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}\binom{10}{3}}$	3
	Rozwiązanie pełne: Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \dfrac{21}{40}$	4
17.	Rozwiązanie: Zapisujemy wszystkie przypadki liczb, których iloczyn cyfr jest 8: 1) 8 i 9 jedynek 2) 2, 4 i 8 jedynek 3) 2, 2, 2 i 7 jedynek Obliczamy liczbę liczb w każdym przypadku: 1) 10 liczb 2) $10\cdot 9 = 90$ 3) $\binom{10}{3} = 120$ Korzystamy z reguły dodawania i otrzymujemy odpowiedź: $10 + 90 + 120 = 220$	0–4
	Postęp: Zapisanie wszystkich przypadków liczb, których iloczyn cyfr jest 8: 1) 8 i 9 jedynek 2) 2, 4 i 8 jedynek 3) 2, 2, 2 i 7 jedynek i podanie liczby liczb w pierwszym przypadku: 10 liczb (lub w innym przypadku)	1

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
	Pokonanie zasadniczych trudności: Obliczenie liczby liczb w pozostałych przypadkach: 2) $9\cdot 8=72$ 3) $\binom{10}{3}=120$	3 (2 pkt, jeśli obliczono liczbę liczb w jednym z pozostałych przypadków)
	Rozwiązanie pełne: Obliczenie sumy i podanie odpowiedzi: $10+90+120=220$	4
18.	Rozwiązanie: Rozwiązujemy układ równań: $\begin{cases} x=\dfrac{2k^2-k}{k^2+1} \\ y=\dfrac{-k^2-2k}{k^2+1} \end{cases}$ $W=f(k)=2y+x \Rightarrow f(k)=\dfrac{-5k}{k^2+1}$, $D=R$ Obliczamy pochodną funkcji: $f'(k)=\dfrac{5k^2-5}{\left(k^2+1\right)^2}$ $f'(k)=0 \Leftrightarrow k=-1 \vee k=1$ $f'(k)>0 \Leftrightarrow k\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \wedge f'(k)<0 \Leftrightarrow x\in(-1,1)$, zatem funkcja rośnie w przedziałach $(-\infty,-1\rangle,\langle 1,+\infty)$ i maleje w przedziale $\langle -1,1\rangle$, więc w punkcie $k=-1$ funkcja osiąga maksimum będące największą wartością funkcji. $f(-1)=\dfrac{5}{2}$	0–7
	I część: Rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x=\dfrac{2k^2-k}{k^2+1} \\ y=\dfrac{-k^2-2k}{k^2+1} \end{cases}$	2
	Zapisanie wzoru funkcji: $f(k)=\dfrac{-5k}{k^2+1}, k\in R$	1
	II część: Zbadanie pochodnej i wyznaczenie ekstremum Wyznaczenie wzoru pochodnej funkcji pomocniczej: $f'(k)=\dfrac{5k^2-5}{\left(k^2+1\right)^2}$	1
	Wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej: $k=-1 \vee k=1$	1
	Zbadanie znaków pochodnej i zapisanie wniosku dotyczącego maksimum funkcji: $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(0,R\sqrt{2}\right) \wedge f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(R\sqrt{2},2R\right)$, zatem funkcja rośnie w przedziale $f'(k)>0 \Leftrightarrow k\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \wedge f'(k)<0 \Leftrightarrow x\in(-1,1)$, zatem funkcja rośnie w przedziałach $(-\infty,-1),(1,+\infty)$ i maleje w przedziale $-1,1$, więc w punkcie $k=-1$ funkcja osiąga maksimum będące największą wartością funkcji.	1
	III część: Wyznaczenie największej wartości funkcji: $f(-1)=\dfrac{5}{2}$	1